# INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA CLÁSICA

Notas 2020-1

**Manuel Torres V**
**Contacto**: manuel.torres@ug.uchile.cl

# Prefacio

El presente compilado de problemas (aún en desarrollo) fue reunido desde el año 2017 en mi experiencia como ayudante de los cursos: Introducción a la Física Clásica y Sistemas Newtonianos de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, y del curso de Física 2 en la Universidad de O'Higgins. El fin de este compilado de problemas es utilizarlo como apoyo en la modalidad online durante la pandemia a partir de la temporada de exámenes del primer semestre del año 2020.

Los desarrollos de los problemas están en proceso de digitalización, ésta versión la hago pública y priorizando los contenidos más recientes vistos en los cursos de los que participo hasta la fecha.

Cualquier sugerencia o propuesta puede ser enviada a mi mail:

- manuel.torres@ug.uchile.cl

# Índice general

# Capítulo 1

# Métodos matemáticos

## 1.1. Trigonometría

Ya definidas las funciones trigonométricas (6), es posible comenzar a deducir identidades que cumplen, para iniciar este estudio se tienen:

- **Propiedades obtenibles de las funciones:** Dado que es posible verificar que la función sin es impar, cos es par, se obtienen las dos primeras identidades (verán este tema con mayor profundidad en MA1001):

  $$\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$$
  $$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$$

  Mientras que, como ambas funciones poseen el mismo comportamiento sinusoidal (osilatorio), no obstante existe un desfase, se tiene que realizando un "desplazamiento"horizontal es posible conseguir la igualdad:

  $$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha)$$

- **Identidades pitagóricas:** A partir del teorema de Pitágoras es posible demostrar el siguiente resultado:

  $$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$$

  Posteriormente, a partir del resultado anterior, es directo deducir los siguientes dos resultados, que en principio representan lo mismo:

  $$\tan(\alpha)^2 + 1 = \sec(\alpha)^2$$
  $$\cot(\alpha)^2 + 1 = \csc(\alpha)^2$$

**Teorema 1** (Pitágoras, versión trigonométrica)**.** Sea $\alpha$ un ángulo, luego:

$$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$$

**Corolario 1.1.** Sea $\alpha$ un ángulo, luego se cumplen las siguientes identidades:

$$\tan(\alpha)^2 + 1 = \sec(\alpha)^2$$
$$\cot(\alpha)^2 + 1 = \csc(\alpha)^2$$

*Demostración.* Suponiendo que (pues fue visto en cátedra):

$$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$$

1. Aplicando $\frac{1}{\sin^2(\alpha)}$ en ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2}{\sin^2(\alpha)} &= 1 + \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \\ &= \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \\ \Rightarrow 1 + \cot^2(\alpha) &= \csc^2(\alpha) \end{aligned}$$

2. Análogamente, aplicado $\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$ es posible obtener:

$$\tan(\alpha)^2 + 1 = \sec(\alpha)^2$$

Se propone realizar el desarrollo para verificar ésta identidad.

■

**Suma y resta de ángulos** A continuación se presentan las identidades para la suma y resta de ángulos a juicio de muchos las más difíciles de recordar y menos intuitivas.

**Proposición 1.**

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \tan(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha + \beta)/\cos(\alpha + \beta) \\ \tan(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha - \beta)/\cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Es posible hallar identidades para todas las funciones trigonométricas, no obstante basta con conocer las de seno y coseno, pues ya a estas alturas sabemos que es posible escribir las demás funciones trigonométricas en términos de seno y coseno.

*Ejercicio propuesto.*

1. Utilizando las propiedades de seno y coseno, demuestre las identidades de suma/resta de ángulos para la tangente:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha + \beta)/\cos(\alpha + \beta) \\ \tan(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha - \beta)/\cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

2. Encuentre alguna expresión para:

$$\begin{gathered} \sec(\alpha + \beta) \\ \csc(\alpha + \beta) \\ \cot(\alpha + \beta) \end{gathered}$$

**Funciones trigonométricas de semiángulos:**

**Proposición 2.**

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$
$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2$$

*Demostración.*

1. Suponiendo que se cumple que: $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)$, basta con tomar $\alpha = \beta$, teniendo así que:

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

Concluyendo así la igualdad buscada.

2. Suponiendo que se cumple que: $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$, basta con tomar $\alpha = \beta$, teniendo así que:

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

Concluyendo la igualdad finalmente.

∎

*Ejercicio propuesto.* Utilizando lo que se acaba de demostrar, intente probar:

$$cos(2\alpha) = 1 - 2sen(\alpha)^2$$

$$cos(2\alpha) = 2cos(\alpha)^2 - 1$$

**Teorema 2** (Teorema del coseno)**.** Sea el triángulo $\triangle ABC$ y el ángulo $\alpha$ opuesto a la arista $A$, entonces:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

**Teorema 3** (Teorema del seno)**.** Sea el triángulo $\triangle ABC$ y los ángulos $\alpha, \beta, \gamma$ opuestos a las aristas $A, B, C$ respectivamente, entonces:

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)}$$

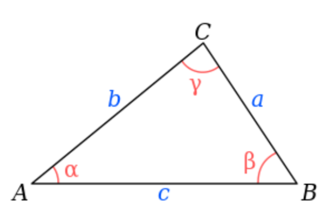



Figura 1.1: Triángulo $ABC$ utilizado para teoremas.

## 1.2. Problemas

**P1.-** Demuestre las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \tag{1.1}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \tag{1.2}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \tag{1.3}$$

**P2.-** Sea $r$ el radio del círculo circunscrito de un pentágono regular:

*a*) ¿Cuánto mide el ángulo interior $\beta$? (en radianes)

*b*) Determine el largo de algún lado del pentágono en función de $r$.

*c*) Determine el área del pentágono.

**P3.-** *Ley de Snell:* Al incidir luz sobre una interfase, por ejemplo, al pasar del aire al vidrio o viceversa, ésta generalmente sufre un cambio de dirección. Este fenómeno se conoce con el nombre de regracción de la luz. La ecuación que describe este fenómeno es la Ley de Snell:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{v_{\text{aire}}}{v_{\text{vidrio}}}$$

donde $v_{\text{aire}}$ y $v_{\text{vidrio}}$ corresponden a la velocidad de la luz en el aire y el vidrio, respectivamente.

*a*) Suponiendo que un haz de luz incide sobre un vidrio de $2cm$ de espesor, con un ángulo de incidencia $\alpha = 40°$. Encuentre la distancia $d$ por la cual el haz de luz emergente se encontrará paralelamente desplazado respecto al haz incidente.

*b*) Considere ahora un haz de luz incidiendo sobre un prisma en la forma que se muestra en la figura. Encuentre el ángulo $\beta$ para $\alpha \in \{20°, 40°, 50°, 60°, 70°\}$. ¿Para qué ángulo $\alpha$ se obtiene $\beta = 90°$?.

**P4.-** Un salvavidas ubicado en el punto A en una playa debe socorrer a un nadador ubicado en el punto B. La velocidad con que puede correr el salvavidas en la arena es $v_1$ y la velocidad con que avanza en el agua es $v_2$. Sea P el lugar óptimo en el cual el salvavidas debe ingresar al agua para que tarde el menor tiempo posible en el trayecto de A a B. Demuestre que en ese caso se satisface:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

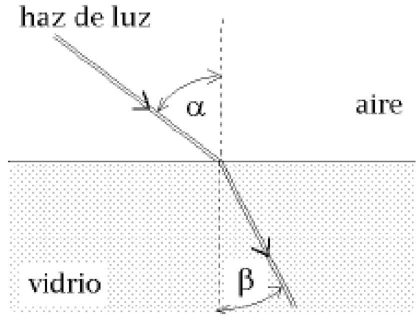



Figura 1.2: Ley de Snell.

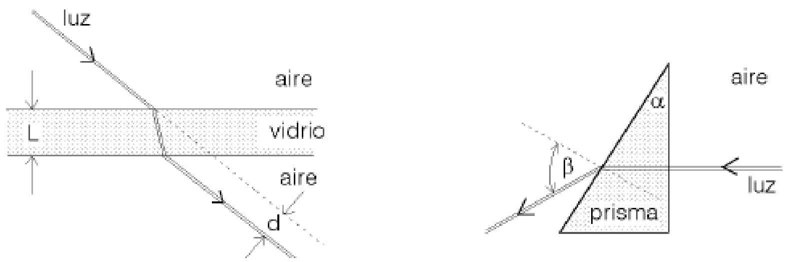



Figura 1.3: Ley de Snell sobre un prisma.

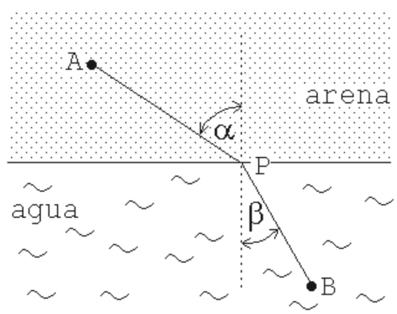



Figura 1.4: Zona donde nada el salvavidas.

## 1.3. Cálculo

## 1.4. Gráficos, variación media e instantánea

La cinemática corresponde al estudio de las propiedades que describen el movimiento de las partículas o sistemas (de partículas) sin considerar la causa, en este curso estudiaremos principalmente:

1. Posición

2. Velocidad

3. Aceleración

Para simplificar desde un inicio y abordar el estudio, es necesario introducir conceptos matemáticos nuevos, sin los cuales sería muy difícil avanzar, algunos de ellos son:

1. Definiciones vectoriales y definiciones de magnitud que permiten diferenciar:
   - Desplazamiento vs Distancia recorrida.
   - Velocidad vs rapidez.
2. Definiciones medias y definiciones instantáneas que permiten diferenciar:
   - Velocidad media vs velocidad instantánea

*Comentario.* Para hallar magnitudes instantáneas, es necesario introducir (mas adelante) herramientas de cálculo diferencial (derivadas), mientras que para trabajar con magnitudes medias, basta con trabajar (muy bien) con cálculos de pendiente de la ecuación de la recta.

Para comenzar a trabajar, veremos una de las nociones más simples para el cálculo de velocidad, la velocidad media que se obtiene a partir de la pendiente de una función de posición versus tiempo.

La velocidad media en un intervalo corresponde a la pendiente de la recta que une los dos puntos de un gráfico de posición vs tiempo en el intervalo considerado:

$$\overline{v}_{01} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$$

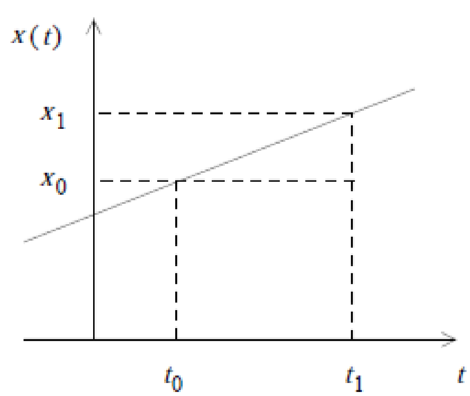



Figura 1.5: Gráfico posición vs tiempo.

## 1.5. Problemas

**P1.-** Un conductor maneja su coche durante 10km a una velocidad de 90Km/h, luego otros 10Km maneja a una velocidad de 70Km/h.¿Cuál es la rapidez promedio durante el trayecto de 20Km?

**P2.-** La figura muestra la posición de una partícula en función del tiempo, encuentre la velocidad promedio en los siguientes intervalos:

*a)* $0s < t < 4s$.

*b)* $7s < t < 10s$.

*c)* $0s < t < 13s$.

*d)* $10s < t13s$.

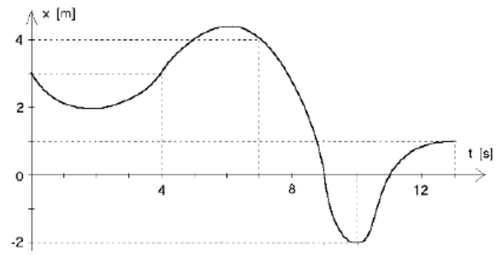



Figura 1.6: Gráfico de posición vs tiempo.

**P3.-** Suponga que la posición de una partícula en función del tiempo viene dada por:

$$z(t) = t - 4\cos t$$

*a)* Grafique $z(t)$ en el intervalo de tiempo $0 < t < 6$.

*b)* A partir del gráfico responda las siguientes preguntas:

1) ¿En qué instante la velocidad es nula?
2) ¿En qué instantes la partícula se encuentra en el origen?
3) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad es negativa?
4) ¿En qué intervalos de tiempo la aceleración es positiva?

*c)* Encuentre la velocidad instantánea en función del tiempo evaluando:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

*d)* Grafique $v(t)$ encontrada en la parte anterior. A partir del gráfico responda las siguientes preguntas:

1) ¿En qué instante la velocidad es nula?
2) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad es negativa?
3) ¿En qué intervalos de tiempo la aceleración es positiva? (Compare las respuestas con las de la parte b).

La figura 1.7 muestra la posición de una partícula en función del tiempo, tal que los ángulos de las tangentes geométricas .

**P4.-** *a)* Encuentre la velocidad media en el intervalo de tiempo $2s < t < 10s$.

*b)* Encuentre la velocidad instantánea para $t = 10s$.

*c)* ¿En qué instante o instantes la velocidad (instantánea) de la partícula es nula?

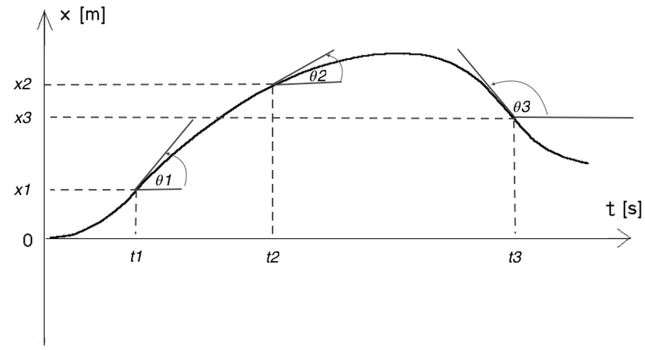



Figura 1.7

*d*) ¿En qué instante la rapidez es máxima?

*e*) ¿En qué instante la aceleración es nula?

**P5.-** Considere dos varillas muy largas: una fija horizontalmente y la otra formando un ángulo $\phi$ constante con la primera, y moviéndose verticalmente con rapidez $v_0$ constante (ver figura 2.5). Determine la velocidad con que se mueve el punto de intersección de las dos varillas (tal punto de intersección no corresponde al movimiento de algún objeto físico real).

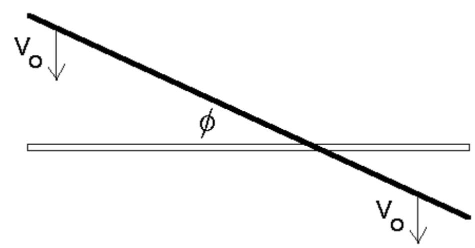



Figura 1.8

**P6.-** Suponga que la altura de cierto proyectil en función del tiempo viene dada por la relación $z(t) = -a_0(t - t_0)^2 + z_0$, con $z_0 = 125$ $[m]$, $t_0 = 5$ $[s]$ y $a_0 = 5$ $[m/s^2]$.

*a*) Grafique la altura del proyectil en función del tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 12$ $[s]$.

*b*) ¿En qué instante choca el proyectil contra el suelo?

*c*) Encuentre gráficamente la velocidad instantánea (es decir, mida las pendientes de las tangentes) en los instantes $t = 0$ $[s]$, $t = 2$ $[s]$, $t = 4$ $[s]$, $t = 6$ $[s]$, $t = 8$ $[s]$ y $t = 10$ $[s]$. Grafique su resultado.

# Capítulo 2

# Cinemática de una partícula

## 2.1. Problemas

### 2.1.1. Problemas de lanzamiento parabólico

**P1.-** Una pelota es pateada con velocidad inicial y ángulo desde el inicio de una rampa infinita de ángulo característico:

*a*) Calcule el alcance de la pelota sobre la rampa.

*b*) Calcule el ángulo en función de para el cual el alcance es máximo. Analice los casos $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \pi$. Hint: Use identidades trigonométricas que impliquen ángulos dobles.

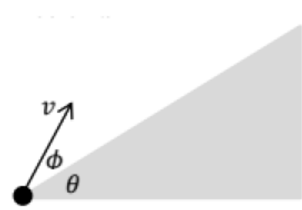



Figura 2.1: Figura problema 1.

**P2.-** Desde una distancia d del borde recto de un tobogán se dispara una bengala. Si el tobogán tiene una altura h y un largo b, determinar ambas componentes de la velocidad inicial del proyectil para que éste aterrice sobre el vértice superior del tobogán de manera que su velocidad sea paralela al plano inclinado.

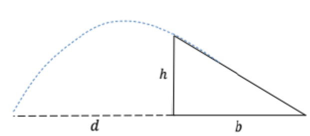



Figura 2.2: Figura problema 2.

**P3.-** El ibis es un ave egipcia con la misión de entregar una ofrenda al faraón Tutankhamon que espera aburrido en la cámara mortuoria de su pirámide. El ibis, que vuela con velocidad u, debe dejar caer su ofrenda, desde lo alto de su vuelo, de modo tal que no sólo se encuentre con la entrada del canal secreto que conduce a la cámara mortuoria (cuyas dimensiones son suficientes para albergar el preciado encargo) sino que además tenga la misma dirección del canal en dicho punto (ver figura). Calcule la altura H y la distancia D (indicadas en la figura) desde las cuales el ibis debe soltar la ofrenda, para que el faraón reciba su regalo. Considere que la pirámide, proyectada en el plano de la trayectoria de la ofrenda es un triángulo equilátero de lado a, y que el canal secreto que lleva hacia la cámara de Tutankhamon es perpendicular a la cara de la pirámide y se encuentra en su punto medio.

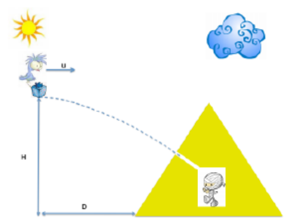



Figura 2.3: Figura problema 3.

**P4.-** Un halcón vuela horizontalmente a 10m/s en línea recta a 200m de altura. En el pico lleva un ratón que se le cae. Después de 2 segundos el halcón reacciona y cambia su trayectoria para recuperar su presa. Para ello cambia su velocidad tanto en magnitud como en dirección siguiendo una trayectoria recta, descendente, que forma un ángulo con la vertical y recupera el ratón a 3 metros sobre el suelo.

*a*) Encuentre la velocidad (magnitud y dirección) del halcón.

*b*) ¿Por cuanto tiempo estuvo el ratón en caída libre?

**P5.-** **Tarea 1, sección 4, 2020-1.** Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba y alcanza una altura máxima $h$. La pelota cae libremente bajo la acción de la gravedad terrestre y rebota repetidamente, dado que después de cada bote la pelota alcanza una fracción $f < 1$ de un altura previa.

a) Describa la ecuación de itinerario de forma conveniente donde no necesite conocer la velocidad inicical para describir la caída de la pelota, utilizando esto determine el tiempo de un movimiento vertical de subida y bajada. *Hint: Recuerde que el lanzamiento vertical es en cierta forma simétrico.*

b) Encuentre el tiempo total que demora la pelota antes de detenerse. *Hint: Note que el tiempo total puede ser escrito como una serie.*

c) Utilizando el razonamiento anterior, encuentre la distancia total que la pelota viaja.

**P6.-** **Control 1 2019-1.**
Una persona lanza, simultáneamente, dos objetos en el aire desde el nivel del suelo. Los objetos dejan la mano de la persona con diferentes ángulos y rapideces y viajan según las trayectorias parabólicas indicadas por $A$ y $B$ en la figura, de manera que $h_A > h_B$ y $L_A < L_B$. El roce con el aire es despreciable. ¿Cuál de los dos objetos llega antes al suelo?

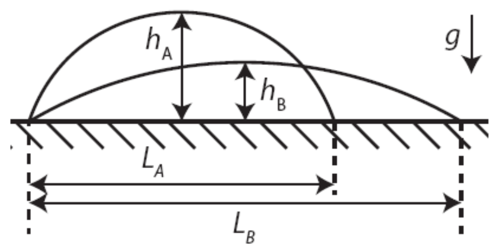



Figura 2.4: Problema 2.

**P7.-** **Control 1 2019-1.**
Una persona lanza, simultáneamente, dos objetos en el aire desde el nivel del suelo. Los objetos dejan la mano de la persona con diferentes ángulos y rapideces y viajan según las trayectorias parabólicas indicadas por $A$ y $B$ en la figura, de manera que $h_A > h_B$ y $L_A < L_B$. El roce con el aire es despreciable. ¿Cuál de los dos objetos llega antes al suelo?

**P8.-** **Control recuperativo 2019-1.**
Un cuerpo es lanzado con rapidez de $25m/s$, desde una altura inicial de $2m$ sobre el suelo, formando un ángulo de 30ř con la horizontal. Mientras el cuerpo sube hasta el punto de altura máxima, está permanentemente sometido a la aceleración de gravedad terrestre $g \sim 10m/s^2$, pero una vez que comienza a bajar está sometido a demás a una segunda aceleración constante de frenado de magnitud $2m/s^2$, en dirección horizontal.

*a*) Calcule el tiempo que el cuerpo demora en llegar a la altura máxima.

*b*) Calcule el tiempo que el cuerpo demora en caer.

*c*) Calcule la distancia total recorrida por el cuerpo en la dirección horizontal, desde el punto de lanzamiento hasta el punto en que choca contra el suelo.

*d*) Calcule la magnitud de la velocidad del objeto justo antes que impacte contra el suelo.

### 2.1.2. Problemas de movimiento circular uniforme

**P9.-** Un disco delgado dispuesto horizontalmente gira en torno a su eje vertical con velocidad angular constante. El disco tiene una perforación a cierta distancia de su centro. Un proyectil es disparado verticalmente hacia arriba desde un punto situado a una distancia $h$ por debajo del plano del disco y se observa que pasa limpiamente por el agujero, alcanzando una altura $h$ por encima del disco, y volviendo a pasar limpiamente por el mismo agujero luego de una vuelta. Calcule el ángulo girado por el disco desde el disparo a la primera pasada del proyectil por la perforación.

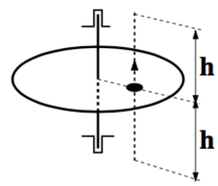



Figura 2.5

**P10.-** Considere una rueda de la fortuna. Se trata de un juego consistente en una rueda vertical de radio $R$ que gira con velocidad angular constante. Una niña montada sobre la rueda deja caer su lápiz cuando se encuentra en un ángulo $\theta$ (ver Figura 4.6) con la horizontal. En los instantes posteriores el objeto se desplaza por el interior o exterior de la rueda dependiendo de $\theta$.

(a) Determine el ángulo crítico que separa estas dos opciones (indicación una forma de abordar este problema es estudiar la evolución de $r$, la distancia del lápiz hasta el centro de la rueda, para tiempos inmediatamente posteriores a la liberación del lápiz).

(b) Verifique su respuesta con los casos límite $\omega$ grande y chico.

(c) Encuentre el lugar en el piso en el que caerá el lápiz dependiendo del ángulo $\theta$ al momento de ser liberado.

**P11.-** En el gráfico de la Figura 2.7 se representa el movimiento angular de dos móviles, $A$ y $B$, que inician su movimiento desde la misma posición. El móvil $A$ mantiene una velocidad angular igual a $4\pi/T$, en tanto que $B$ acelera uniformemente hasta alcanzar una velocidad angular de $6\pi/T$ en un lapso $T$. Desde ese instante $B$ frena uniformemente. Determine la separación angular entre $A$ y $B$ en $t = T$ . Determine la máxima aceleración de frenado de $B$ para que éste se encuentre con $A$

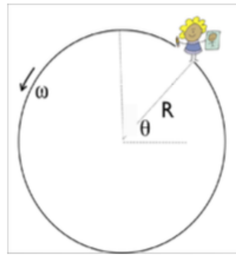



Figura 2.6

al momento de detenerse. Determine al desplazamiento angular de $B$ desde que parte hasta que se detiene.

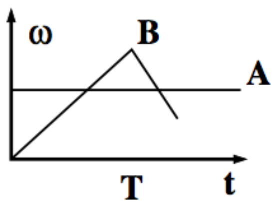



Figura 2.7

# Capítulo 3

# Dinámica de una partícula

## 3.1. Problemas

**P1.-** Un móvil se mueve con rapidez constante $v_o$ en trayectoria circunferencial de radio $R$. Calcule el vector aceleración media entre los dos instantes representados en la Figura 3.1. Represente su resultado en términos de los vectores $\hat{x}$ e $\hat{y}$ indicados.

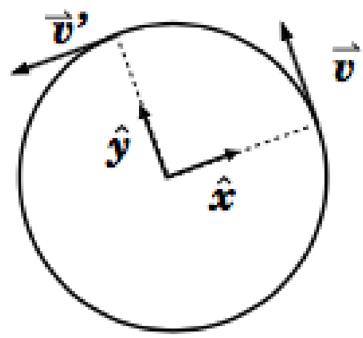



Figura 3.1

**P2.-** ¿Qué fuerza $\vec{F}$ debe aplicarse al carro de masa $M$ (vea la figura adjunta al problema) para que el carro de masa $m_2$ no suba ni baje?

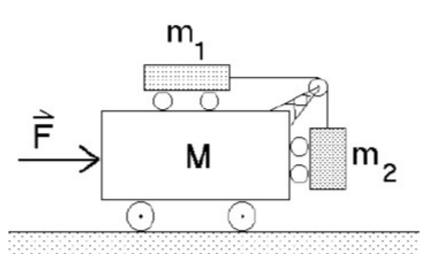



Figura 3.2: Problema 1.

**P3.-** Una cuña lisa de masa $M$ se desliza bajo la acción de una fuerza horizontal $F$. Sobre ella se coloca un bloque de masa $m$.

*a*) Dibuje todas las fuerzas que actúan sobre cada una de las masas.

*b*) Determine el valor de $F$ para que el bloque no resbale sobre la cuña.

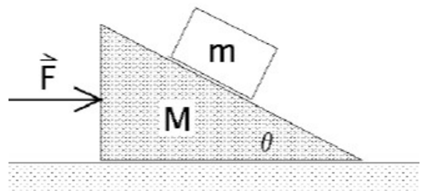



Figura 3.3: Problema 2.

**P4.-** Sea $\mu$ el coeficiente de roce estático entre la masa $m$ y el carro. ¿Cuál es la fuerza mínima que debe aplicarse al carro para que la masa $m$ no caiga?

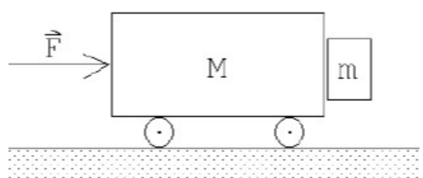



Figura 3.4: Problema 3.

**P5.-** Dos objetos 1 y 2, de igual masa están arados a los extremos de una cuerda ideal de largo $L$. El conjunto descansa sobre un disco que gira en un plano horizontal con velocidad angular constante, en torno a su centro (vea la figura adjunta). Suponga que no existe fricción entre el disco y el objeto 1, pero existe fricción entre el objeto 2 y la superficie del disco. Los coeficientes de fricción estético y cinético entre la masa 2 y el disco son $\mu_e$ y $\mu_c$ respectivamente.
Se observa que cuando el disco gira con velocidad angular $w_0$, la cuerda se mantiene tensa y alineada en al dirección radial. En esta condición el objeto 2 está en reposo a una distancia $R$ del eje de rotación. Cuando la velocidad angular es mayor que $w_0$ el objeto 2 (y también el 1) resbala sobre el disco. Calcule el valor de $w_0$.

**P6.-** Considere una masa $m$ atada a dos cuerdas ideales de largo $L$ (Figura 1, las cuales están unidas, con una separación $L$ a un eje vertical que rota con velocidad $\omega$.

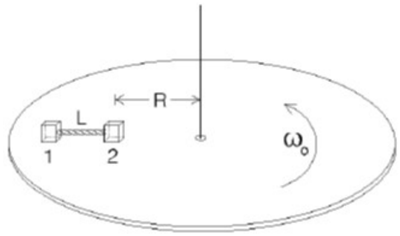



Figura 3.5: Problema 4.

a) Determine la tensión de las cuerdas en esta condición

b) Determine la rapidez angular mínima para el sistema para asegurar tensión en las cuerdas

**P7.-** Considere una cuerda ideal en cuyos extremos cuelgan 2 masas $m$ y que pasa por 3 poleas ideales, tal como se muestra en la Figura 2 de ellas están fijas, mientras que la polea del medio es móvil y tiene una masa $M$ asociada a ella. Determine la tensión de la cuerda y aceleración que adquiere la polea móvil.

**P8.-** Tres bloques de igual masa $m$ posan sobre un plano horizontal. El coeficiente de roce entre cada bloque y el piso es $\mu$. Los dos primeros bloques se unen mediante una cuerda ideal mientras que los dos últimos se unen mediante un resorte de constante elástica $k$. Una fuerza horizontal aplicada al primer bloque hace que los tres bloques se muevan manteniendo la elongación del resorte constante e igual a $\Delta$. Determine la magnitud de la fuerza aplicada.

**P9.-** En presencia de la gravedad terrestre $g$, una bolita de masa $m$ es sostenida mediante un resorte de constante elástica $k$ y de longitud natural $L$. El conjunto se dispone dentro de un tubo de paredes lisas inclinado en un ángulo $\beta$ con respecto a la vertical.

a) Determine la elongación $\delta$ del resorte

b) En base a su resultado examine y discuta la posibilidad de que $\delta = 0$

**P10.-** **Control 2 2019-1.**
Un camión viaja en línea recta sobre un camino horizontal y se encuentra acelerando con aceleración de magnitud $a$. El extremo de una cuerda (que se puede considerar sin masa e inextensible) se encuentra atada a la parte trasera del camión. Del otro extremo de la cuerda cuelga un balde de masa $M$. La cuerda forma un ángulo constante con respecto a la parte trasera del camión, como se muestra en la figura (a).

*a*) Encuentre el ángulo $\theta$ en que queda la cuerda.

*b*) Determine la tensión de la cuerda.

*c*) Discuta qué sucede con sus resultados de las partes (a) y (b) cuando $a >> g$.

- Suponga ahora que el camión transita por una pendiente, que forma un ángulo $\alpha$ con respecto a la horizontal, como se muestra en la figura (b). Suponga que el camión sigue acelerando con aceleración de magnitud $a$.

*d*) Determine el nuevo valor del ángulo $\theta$ con respecto a la parte trasera del camión.

*e*) Determine la tensión de la cuerda en esta nueva configuración.

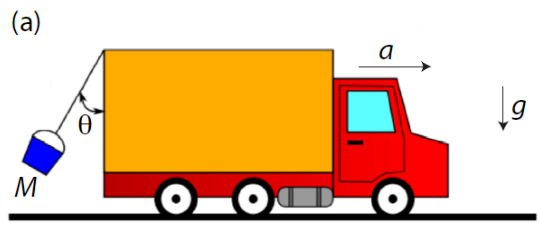



Figura 3.6: Problema 5, figura a.

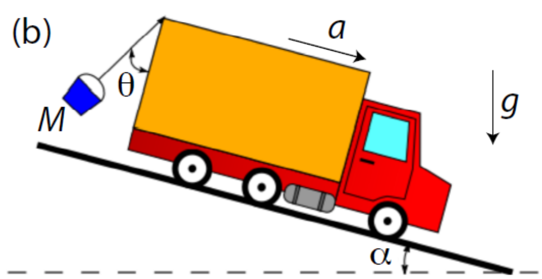



Figura 3.7: Problema 5, figura b.

**P11.-** **Control recuperativo 2019-1.**
Un automóvil describe una curva de radio $R$. El camino tiene un peralte con ángulo de inclinación $\theta$ con respecto a la horizontal y hay un coeficiente de fricción entre los neumáticos y el camino $\mu$.

*a*) Encuentre las rapideces máxima y mínima que puede tener el automóvil, sin que deslice.

*b*) Dibuje el diagrama de cuerpo libre en cada caso.

*c*) Encuentre los valores de esas rapideces cuando $\mu = 1$ y $\theta = \pi/4$.

**P12.-** **Control 1 2020-1:**

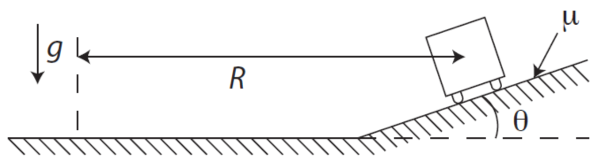
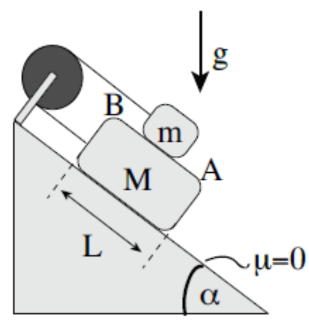



Figura 3.8: Problema 4.

Un bloque de masa $M$ se puede mover sin roce sobre un plano inclinado que forma un ángulo $\alpha$ con la horizontal. Este bloque está unido por una cuerda ideal que pasa por una polea ideal a otro bloque de masa $m < M$. Entre las superficies de ambos bloques en contacto hay roce caracterizado por un coeficiente de roce dinámico $\mu_d$.

Si inicialmente el bloque de masa $m$ sobre el punto $A$ y el sistema parte desde el estado de reposo, calcule el tiempo que tarda en llgar al punto $B$.




**Desarrollo.** *Análisis dinámico:* Sean $N$ la normal entre el bloque de masa $M$ y el plano inclinado, $N_{Mm}$ la normal producida por el contacto entre ambos bloques y $F_r$ la magnitud de la fuerza de roce entre ambos bloques, luego se tiene que las ecuaciones de movimiento de ambos bloques son:

$$\sum \vec{F}(m) = (F_r - T + mg\sin(\alpha))\hat{x} + (N_{Mm} - mg\cos(\alpha))\hat{y} = -ma\hat{x}$$
$$\sum \vec{F}(M) = (-F_r - T + Mg\sin(\alpha))\hat{x} + (N - N_{Mm} - Mg\cos(\alpha))\hat{y} = Ma\hat{x}$$

sujeto a la relación $N_{Mm}\mu_d = F_r$, de lo que se desprende:

$$\begin{aligned} -ma &= N_{Mm}\mu_d - T + mg\sin(\alpha) \\ Ma &= -N_{Mm}\mu_d - T + Mg\sin(\alpha) \\ 0 &= N_{Mm} - mg\cos(\alpha) \\ 0 &= N - N_{Mm} - Mg\cos(\alpha) \end{aligned}$$

Es fácil notar que se entre las 3 primeras ecuaciones hay 3 incógnitas, por lo tanto es posible resolver dicho sistema de ecuaciones, en particular es de interés calcular $a$. Para ello, de (3) se despeja:

$$N_{Mm} = mg\cos(\alpha)$$

luego reemplazando $N_{Mm}$ en (1) y (2):

$$\begin{aligned} -ma &= mg\mu_d\cos(\alpha) - T + mg\sin(\alpha) \\ Ma &= -mg\mu_d\cos(\alpha) - T + Mg\sin(\alpha) \end{aligned}$$

Finalmente, restando ambas ecuaciones se tiene que:

$$\begin{aligned} Ma - (-ma) &= -mg\mu_d \cos(\alpha) - T + Mg\sin(\alpha) - [mg\mu_d\cos(\alpha) - T + mg\sin(\alpha)] \\ \Rightarrow (M+m)a &= -mg\mu_d\cos(\alpha) - T + Mg\sin(\alpha) - mg\mu_d\cos(\alpha) + T - mg\sin(\alpha) \\ &= Mg\sin(\alpha) + mg[-\sin(\alpha) - 2\mu_d\cos(\alpha)] \end{aligned}$$

Por lo tanto la aceleración $a$ que sienten los bloques es:

$$a = \frac{Mg\sin(\alpha) + mg[-\sin(\alpha) - 2\mu_d(\alpha)]}{M+m}$$

*Análisis cinemático:* Para comenzar, notemos que el tiempo $T$ que demora el bloque de masa $m$ en moverse sobre el bloque de masa $M$ entre los puntos $A$ y $B$ es es tiempo que demora en recorrer la distancia de $\frac{L}{2}$, puesto que ambos bloques se mueven al mismo tiempo bajo la misma aceleración y como ambos comienzan desde el reposo, recorren iguales distancias en iguales intervalos de tiempo. Entonces:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{at^2}{2} \\ \frac{L}{2} &= \frac{aT^2}{2} \end{aligned}$$

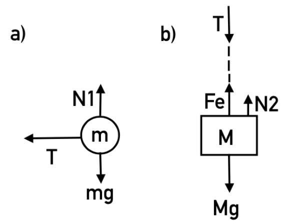
Por lo tanto $T = \sqrt{L/a}$, osea:

$$T = \sqrt{\frac{L(M+m)}{Mg\sin(\alpha) + mg[-\sin(\alpha) - 2\mu_d\cos(\alpha)]}}$$

**P13.- Control 1 2020-1:**

Una partícula de masa $m$ que se puede mover sin roce sobre una superficie horizontal está unida por una cuerda ideal de largo $L$ a un resorte ideal de constante elástica $k$ y largo natural $l_o$ nulo, el cual está unido por el otro extremo a un bloque de masa $M$. Este bloque está apoyado sobre una superficie que está ubicada a una distancia $H$ abajo del plano que contiene a la primera partícula. Calcule la máxima velocidad angular $\omega$ con que la partícula debe girar en un movimiento circular uniforme para que el bloque no se despegue del suelo.

**Desarrollo.** Sea $N1$ la normal de la masa pequeña $m$, $T$ la tensión que se transmite a lo largo de la cuerda, y considerando el peso $mg$, se presenta el Diagrama de Cuerpo Libre (DCL (a)) de la Figura 2. Para el DCL (b), sea $N2$ la normal de la masa grande $M$, $F_e$ la fuerza elástica producto del resorte, y el peso $Mg$. Se entiende que la tensión en el DCL (a) es radial al movimiento circular uniforme y se transmite de forma lineal a lo largo de ella hasta unirse con el resorte, de esto se obtiene que $T = F_e$.




*Análisis dinámico:* Ya que para la masa $m$ se tiene movimiento circular uniforme, la ecuación de movimiento en el eje radial corresponde a:

$$\sum \vec{F}(m)_r = T = ma_c = mR\omega^2$$

Donde $a_c$ corresponde a la aceleración centrípeta de $m$, la cual se define $a_c = R\,\omega^2$, con $R$ el radio de giro y $\omega$ velocidad angular constante. Para este problema, el radio de giro se obtiene considerando el largo de la cuerda, la separación de los planos y la elongación del resorte, de forma que $R = L - H + \Delta l$, por lo tanto se tiene que:

$$\begin{aligned} T &= m(L - H + \Delta l)\omega^2 \Rightarrow \\ \omega^2 &= \frac{T}{m(L - H + \Delta l)} \\ \omega &= \sqrt{\frac{T}{m(L - H + \Delta l)}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

La condición límite para determinar $\omega$ máximo tal que $M$ no se despegue del suelo corresponde al caso $N2 = 0$, es decir en el momento en que la normal del bloque se vuelva nula. De esta forma se desarrolla la siguiente ecuación de movimiento a partir del DCL (b), con aceleración *nula* ya que la masa se mantiene estática:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}(M)_y = Fe - Mg &= 0 \\ Fe &= Mg \\ k\Delta l &= Mg \\ \Delta l &= \frac{Mg}{k} \end{aligned}$$

Además:

$$T = Fe = Mg$$

Reemplazando las ecuaciones en la velocidad angular, se obtiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg}{m(L - H + \frac{Mg}{k})}} \tag{3.2}$$

Que sería la velocidad angular máxima con que gira $m$ tal que el bloque no se despegue del suelo. Para valores inferiores, la normal comenzaría a participar de la sumatoria de fuerzas que afectan al bloque.

# Capítulo 4

# Energía y momentum

## 4.1. Problemas

**P1.-** Un proyectil es disparado verticalmente hacia arriba de tal forma que alcanza una altura máxima $H$ en un tiempo $T$. En el punto más elevado de la trayectoria el proyectil explota dividiéndose en dos fragmentos de masas iguales. Tras un tiempo $T/2$, después de la explosión, uno de los fragmentos cae en el lugar del disparo. Despreciando el roce con el aire, ¿cuánto tiempo después impactarpa el segundo fragmento en el lugar de disparo?

**P2.-** Un cuerpo de masa $m$ es soltado sobre un plano inclinado desde una altura $h$. El extremo inferior del plano inclinado empalma con un plano horizontal donde se encuentra un resorte ideal no elongado (con una placa de masa despreciable) de constante $k$ y longitud natural $l_0$. Considerando que hay roce cinético $\mu_c$ y estático $\mu_e$ a lo largo de toda la trayectoria (diagonal y horizontal). Calcule el coeficiente de roce $\mu_e$ para que la masa se quede detenida en la posición de compresión máxima del resorte.

**P3.-** Un péndulo simple de largo $L$ y masa $m$ se suelta desde el reposo cuando forma un ángulo $\pi/2$ con la vertical. La cuerda se corta en el punto de la trayectoria donde la tensión alcanza el valor máximo. Calcule a que distancia del pivote, medida en la dirección horizontal, choca la partícula contra el suelo.

**P4.-** Un bloque de masa $m$ desliza sobre una superficie horizontal rugosa que empalma suavemente con un tubo semicircular pulido de radio $R$. El coeficiente de roce cinético entre el bloque y el tramo rugoso $PQ$ (ver figura adjunta) es $\mu$. Determine la velocidad $V_0$ con que debe partir el bloque para qeu éste se deslice sobre el tramo rugoso $PQ$ y luego sobre la superficie del tubo hasta salir volando desde el punto $S$

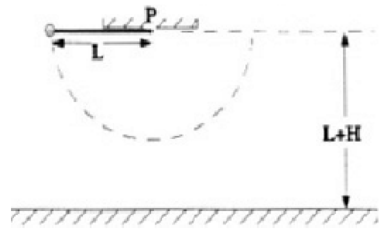



Figura 4.1: Problema 3: Péndulo colgando.

para caer, finalmente, en el punto de partida $P$.

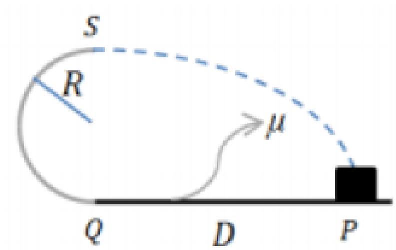



Figura 4.2: Problema 4: Bloque que desliza sobre una superficie horizontal que entra a un tubo circular.

**P5.-** Una partícula colisiona a una segunda partícula de igual masa que estaba inicialmente en reposo. Si colisionan elásticamente sobre un plano horizontal libre de roce, determine el ángulo $\phi$ de salida de la partícula inicialmente en reposo si la primera partícula se desvía un ángulo $\theta$ respecto de la dirección que traía antes de la colisión.

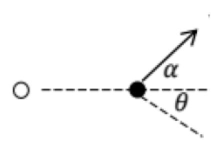



Figura 4.3: Problema 5: Colisión de partículas de igual masa.

**P6.-** Sobre un plano liso se encuentran tres discos iguales (de radio $R$ y masa $M$). Al disco $A$, que incide con velocidad $\vec{v}$choca simultánea y elásticamente con los discos $B$ y $C$, tal como se muestra en la figura. Los discos $B$ y $C$ inicialmente se encuentran en reposo con los centros separados en una distancia $2R + 2a$. Suponga que no hay roce entre los bordes de los discos cuando están en contacto. Encuentre la velocidad del disco $A$ después de la colisión.

**P7.-** $A$ y $B$ son dos esferas de igual masa $m$ engarzadas en el eje horizontal. $B$ está unida a un resorte ideal de largo natural $l_0$ y constante de

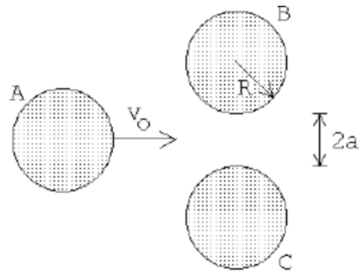



Figura 4.4: Problema 1

restitución $k$. Inicialmente $B$ está en reposo, en el resorte en dirección vertical y sin deformación. $A$ se desliza con velocidad $v$ desconocida, choca con $B$ y ambas permanecen unidas tras la colisión. Calcule $v$, si en el instante en que el conjunto se detiene el ángulo que se observa es $\theta$ entre el resorte y la vertical.

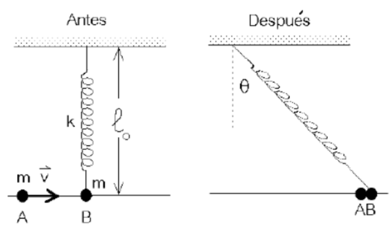



Figura 4.5: Problema 2

**P8.-** Un barra de jabón de masa $m$ se desliza horizontalmente con rapidez $v_0$ sobre una superficie resbalosa la cual empalma con la superficie rugosa de un trineo de masa $M$. No hay roce entre el trineo y la superficie horizontal sobre la cual posa. La barra de jabón entra al trineo y luego de un lapso se detiene sobre este. Calcule la velocidad final del par (barra+trineo) y el trabajo realizado por el roce entre el trineo y el jabón. Si el jabón se desplaza una distancia $D$ sobre el trineo y el roce es uniforme, calcule el coeficiente de roce barra/trineo.

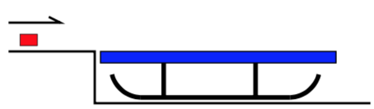


Figura 4.6: Problema 3

# Capítulo 5

# Sistemas extendidos

## 5.1. Sistemas de N partículas

### 5.1.1. Centro de masas,velocidad y aceleración del centro de masas

En un sistema de n partículas de masa $m_i$ y posición $\vec{r_i}$ cada una, tendremos que:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{v}_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{a}_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}$$

De las ecuaciones anteriores es posible hallar expresiones para las sumas de fuerzas externas y el momentum lineal del sistema:

$$\vec{v}_{cm} \left( \sum_{i=1}^{n} m_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i m_i$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{cm} M = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i m_i$$

$$\vec{a}_{cm}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i m_i$$
$$\Rightarrow \vec{a}_{cm} M = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i m_i$$

### 5.1.2. Fuerzas externas y momentum lineal de un sistema extendido

De las variables cinemáticas anteriores, se desprende el siguiente anáisis para el momentum lineal, obteniendo expresiones para la suma de fuerzas:

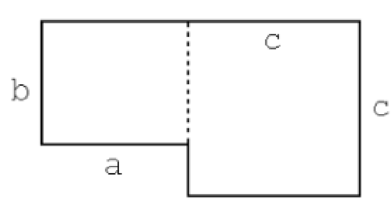
$$\vec{P}_t = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i m_i = \vec{v}_{cm} M, \text{ derivando respecto el tiempo:}$$
$$\vec{F}_t = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i m_i = \vec{a}_{cm} M$$
$$\vec{F}_t = \sum_{ext} \vec{F}_i^{ext} = \vec{a}_{cm} M$$

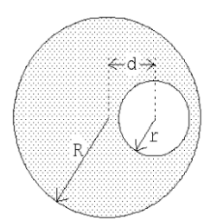
## 5.2. Problemas

**P1.-** *a*) Encuentre la posición del centro de masas de una lámina de densidad (de masa) uniforme $\sigma$ y que tiene la forma indicada en la figura adjunta.

*b*) Encuentre la posición del centro de masas de un disco de densidad uniforme $\sigma$ y espesor despreciable, que además presenta un agujero circular como indica la figura.

*c*) En cinco de los seis vértices de un hexágono hay una masa $m_0$, encuentre la posición del centro de masas.




**Desarrollo.**

*a*) Como la densidad es uniforme, se cummple que la densidad está dada por:

$$\sigma_o = \frac{M_{total}}{A}$$

Luego en el caso de la lámina, utilizando la ecuación 1 se tiene que la masa total está dada por:

$$(ab + c^2)\sigma_o = M_t$$

La cual se puede descomponer como la summa de los dos cuadrados de la figura, lo que se expresa como:

$$ab\sigma_o = m_1$$
$$c^2\sigma_o = m_2$$

Luego, se trabaja con cada cuerpo por separado, respecto al mismo origen (aumamos el origen en la parte inferior izquierda de la imagen, notar que da lo mismo donde asignar el origen), sacando sus centros de masa respectivamente:

$$\vec{r}_{m_1} = \left(\frac{a}{2}, c - \frac{b}{2}\right) \vec{r}_{m_2} = \left(a + \frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

Y reemplazando en la ecuación de ponderación de centros de masas se tiene que:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_{m1} + m_2\vec{r}_{m2}}{m_1 + m_2}$$
$$\Rightarrow \vec{r_{cm}} = \frac{\frac{a^2b}{2} + c^2(a + \frac{c}{2})}{ab + c^2}\hat{x} + \frac{ab(c - \frac{b}{2}) + \frac{c^3}{2}}{ab + c^2}\hat{y}$$

*b)* Por otro lado, para el disco, se tienen las áreas de ambos discos son (tanto el disco macizo sin el hueco, como el disco pequeño que representa el hueco):

$$A_g = \pi R^2$$
$$A_c = \pi r^2$$

Luego como la densidad es uniforme se tiene que respectivamente:

$$M = \sigma_o \pi R^2$$
$$m = \sigma_o \pi r^2$$

Luego, si asignamos el origen del sistema de coordenadas en el centro del disco grande, se tendrá que las posiciones de los centros de masas de ambos discos serán:

$$\vec{r}_{cm.g} = (0, 0)$$
$$\vec{r}_{cm.c} = (d, 0)$$

Y finalmente basta con reemplazar en la ecuación que pondera los centros de masas de cuerpos distintos, con el cuidado de restar el centro de masas del disco hueco, quedando:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{M\vec{r}_{cm.g} + m\vec{r}_{cm.c}}{M - m}$$
$$\vec{r}_{cm} = \frac{-dr^2}{R^2 - r^2}\hat{x}$$

Ya obtenido el resultado, *¿Tiene sentido que sea negativo?*

**P2.-** Suponga que en un hexágono regular de lado L se tienen partículas de masa $m_0$ en 5 de sus 6 vértices.

*a*) Suponga que: Un par de vértices se encuentra en el eje $\hat{y}$, otro par de vértices en un eje que se encuentra a 30ř de inclinación del eje $\hat{x}$, y el último par de vértices se encuentra sobre un eje a 150ř de inclinación del eje $\hat{x}$. Dibúje el sistema y especifique sus ejes (lo ángulos van en sentido antihorario).

*b*) Defina vectores unitarios que le permitan describir los dos ejes inclinados, éstos deben estar en función de los vectores unitarios $\hat{x}, \hat{y}$ y los ángulos engtregados anteriormente. *Hint:* Puede utilizar el sistemma de coordenadas descrito a continuación:

$$\hat{\rho} = \hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta$$

$$\hat{\theta} = -\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta$$

*c*) Escriba la suma de centros de masas para cada eje por separado, note que cada suma está en un sistema de coordenadas diferente.

*d*) Calcule la suma de los centros de masas calculados anteriormente, deje todo escrito en función de un par de vectores unitarios y concluya el centro de masas del sistema completo.

# Capítulo 6

# Sólido rígido

## 6.1. Torque y momentum angular

El torque es la consecuencia del efecto de una fuerza aplicada en un sistema de partículas, el torque genera rotaciones, y para una fuerza externa i-ésima es respecto a un punto $o$ está dado por:

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Así mismo, el torque aplicado por el peso está dado por la siguiente ecuación, puesto que el peso se aplica sobre el centro de masas del sistema:

$$\vec{\tau}_{\vec{P}} = m(\vec{r}_{cm} \times \vec{g})$$

Luego, la suma de todos los torques que aplican sobre el sistema respecto al punto $o$ corresponden a:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{i,o} &= \vec{\alpha} I_o, \text{ en el caso dinámico}\\ &= 0, \text{ en el caso estático}\end{aligned}$$

Por otro lado, el momento angular respecto a $o$ está dado por:

$$\begin{aligned}\vec{L}_o &= \vec{r}_o \times \vec{P}\\ &= m(\vec{r}_o \times \vec{v})\end{aligned}$$

## 6.2. Inercia

La inercia es la resistencia al movimiento en un sentido espacial (al igual que la masa), no obstante ésta depende de la geometría y la distribución de dicha masa, a continuación se dejan algunos valores que se utilizan con frecuencia.

- Aro-cento: $MR^2$
- Disco-centro: $\frac{1}{2}MR^2$
- Disco-diámetro: $\frac{1}{4}MR^2$
- Barra-centro $\frac{1}{12}mL^2$
- Barra-extremo $\frac{1}{3}mL^2$

**Teorema 4** (Ejes paralelos)**.** Dos cuerpos que rotan en torno a un eje, digamos $\hat{k}$, con inercias respecto al mismo punto $o$. Luego la inercia total del sistema es:

$$I_t = I_1 + I_2$$

## 6.3. Energía de un sistema extendido

### Energía cinética

En un sistema de partículas es posible encontrarnos con mas componentes para la energía cinética, éstas son la componente rotacional (r) y la traslacional (l) respecto a un mismo punto $p$.

$$\begin{aligned} K_l &= \frac{1}{2}mv_{cm}^2 \\ K_r &= \frac{1}{2}Iw^2 \\ K_t &= K_l + K_r \\ &= \frac{1}{2}mv_p^2 + \frac{1}{2}I_p w^2 \end{aligned}$$

**Teorema 5** (Steiner)**.** Sea $I_{cm}$ la inercia respecto del centro de masas e $I_o$ la inercia respecto a un punto cualquiera tal que $d(\vec{r}_{cm}, \vec{r}_o)$ es la distancia entre el centro de masas y el punto $o$, luego:

$$I_{cm} + md^2(\vec{r}_{cm}, \vec{r}_o) = I_o$$

Mediante el teorema de Steiner es posible obtener la energía cinética respecto a otros puntos no naturales a partir del centro de masas, pues entrega una relación entre de la inercia respecto del centro de masas y de la inercia respecto algún punto arbitrario $o$, lo que permite obtener la energía cinética respecto a dicho punto $o$.

### Energía potencial

Tenemos que la energía potencial para un sistema extendido es la correspondiente a la del centro de masas, pues:

$$\begin{aligned} U_g &= \sum_{i=1}^{n} m_i g h_i, \text{ donde } m = \sum_{i=1}^{n} m_i \\ &= mg\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{m} h_i\right) \\ &= mgh_{cm} \end{aligned}$$

## 6.4. Condición de equilibrio estático

Estar en equilibrio estático corresponde a que la dinámica no altera el estado del sistema, y estático quiere decir que la cinemática del sistema es nula inicialmente, oséa no hay movimiento, esto quiere decir que:

$$\vec{v}_{cm} = 0$$
$$\vec{w} = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{ext}} = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i = 0$$

## 6.5. Condición de rodadura perfecta

La rodadura es un tipo de movimiento que combina la rotación (comúnmente, de un objeto simétrico axialmente) y la traslación de ese objeto con respecto a una superficie y que implica que el cuerpo que rueda sobre la superficie lo hace sin resbalar o deslizarse con respecto a esta. Al no haber deslizamiento el punto o puntos del cuerpo que se hallan instantáneamente en contacto con la superficie se encuentran instantáneamente en reposo (velocidad nula con respecto a la superficie).

$$\Delta x = R\Delta\theta$$
$$v = Rw$$
$$a = R\alpha$$

## 6.6. Problemas

### 6.6.1. Problemas de estática

*Comentario.* A continuación se presenta un set de problemas de estática en sólidos rígidos, en la mayoría de los problemas se estudiara la aplicación del centro de masas y las condiciones de equilibrio para poder obtener parámetros condicionados a la estaticidad del sistema.

**P1.-** Considere una estructura formada por dos barras uniformes de largos $a$ y $b$, ambas con densidad $\lambda$, unidas de modo que forman un ángulo recto y que cuelga con hilo desde el cielo (ver figura). Determine el ángulo $\alpha$ de la estructura cuando ella se encuentra en equilibrio.

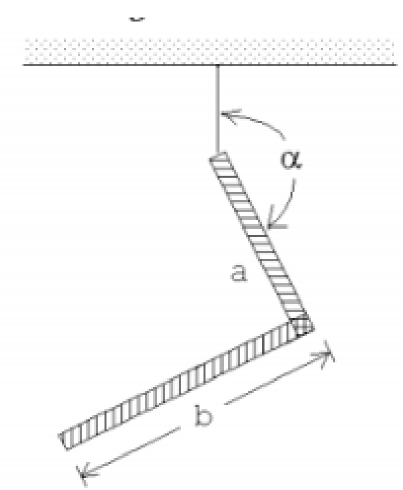



Figura 6.1: Montaje en forma de L colgando desde un extremo por un hilo.

**Desarrollo.** Se debe calcular el centro de masas, puesto que el peso actúa sobre el centro de masas para efectos de la suma de torque, para ello se utiliza que ambas vigas están hechas del mismo material de densidad $\lambda$, luego:

$$\lambda = \frac{m}{a+b}, \text{ donde}$$
$$m_a = \lambda m_a$$
$$m_b = \lambda m_b$$

Luego el centro de masas respecto a la intersección de ambas vigas, está dado por:

$$
\begin{aligned}
r_x &= \frac{\frac{a}{2}m_a}{m} \\
&= \frac{a^2}{2(a+b)} \\
r_y &= \frac{\frac{b}{2}m_b}{m} \\
&= \frac{b^2}{2(a+b)}
\end{aligned}
$$

Por las condiciones de equilibrio estático corresponden a que las sumas de fuerza y de torque son nulas, luego se tiene que:

$$\sum \tau = \vec{r}_{cm} \times m\vec{g} = 0$$

Luego, como el peso es vertical, y el centro de masas se alinea con la vertical por donde pasa la cuerda, luego:

$$
\begin{aligned}
\frac{r_y}{a - r_x} &= \tan(\pi - \alpha) \\
&= -\tan(\alpha)
\end{aligned}
$$

Luego $\alpha = -\arctan\left(\dfrac{r_y}{a - r_x}\right)$.

**P2.-** Se tiene una barra homogénea de masa $M$ y largo $L$, que se sostiene en un pivote a una distancia $L/3$ de su extremo izquierdo. Su extremo izquierdo está a una altura a desde el piso, mientras que su extremo derecho está a una altura $b$, con $a > b$ como se muestra en la figura. En el extremo derecho de la barra se ejerce una fuerza de magnitud $F$ en el sentido vertical.

*a)* Calcule la magnitud $F$ de la fuerza para que la barra esté en equilibrio estático.

*b)* Si se comienza a mover la barra sin variar su inclinación, ¿Cuánto debe desplazarse para que la magnitud de la fuerza ejercida sea $F = Mg/2$?

*c)* Desde la configuración inicial, piense que ahora la barra no se desplaza pero varía el ángulo de inclinación, calcule el ángulo para que la fuerza sea igual que en la parte $b$

**Desarrollo.**

*a)* Sea $\alpha$ el ángulo de inclinación de la barra respecto el suelo (en sentido horario), donde:

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \frac{a-b}{L} \\
\cos(\alpha) &= \frac{L^2 - (a-b)^2}{L}
\end{aligned}
$$

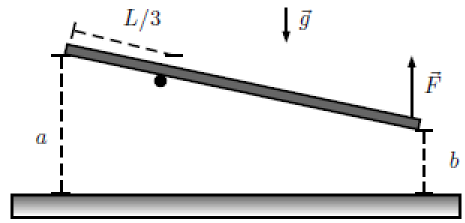



Figura 6.2: Barra con pivote.

Por otro lado, realizando las sumatorias de fuerza y de torque respecto al punto de giro (en el pivote) se obtienen las ecuaciones de movimiento bajo la condición de equilibrio que corresponden a:

$$\begin{aligned}
\sum \vec{\tau_o} &= \left(\vec{r}_F \times \vec{F}\right) - (\vec{r}_P \times M\vec{g}) \\
&= \left(\frac{2}{3}L\hat{r}_F \times \vec{F}\right) - \left(\frac{1}{6}L\hat{r}_P \times M\vec{g}\right) = 0 \\
\sum F_y &= Mg - F + N_y = 0 \\
\sum F_x &= +N_x = 0
\end{aligned}$$

Note que en la ecuación de torque la única incógnita es la magnitud $F$, luego desarrollando la ecuación de torque se tiene:

$$\begin{aligned}
\sum \vec{\tau_o} &= \frac{2LF}{3}\sin(\alpha) - \frac{LMg}{6}\sin(\alpha) \\
&= \frac{2LF}{3} - \frac{LMg}{6} = 0, \text{ despejando } F \\
\Rightarrow F &= \frac{3}{12}Mg \\
&= \frac{1}{4}Mg
\end{aligned}$$

*¿Por qué se utiliza una tan solo una ecuación para despejar $F$?*

*b*) Ahora realizando un desplazamiento igual a $\Delta L$ en la barra con tal que la magnitud de la fuerza $F = Mg/2$, esto solamente altera la ecuación de torque:

$$\begin{aligned}
\sum \vec{\tau_o} &= \left(\vec{r'}_F \times \vec{F}\right) - \left(\vec{r'}_P \times M\vec{g}\right) \\
&= \left(\left(\frac{2}{3}L + \Delta L\right)\hat{r}_F \times \vec{F}\right) - \left(\left((\frac{1}{6}L + \Delta L\right))\hat{r}_P \times M\vec{g}\right) = 0
\end{aligned}$$

Luego desarrollando el producto cruz se tiene que:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{2L}{3} + \Delta L\right)\frac{Mg}{2}\sin(\alpha) - \left(\frac{L}{6} + \Delta L\right)Mg\sin(\alpha) \\
&= \left(\frac{2L}{3} + \Delta L\right)\frac{1}{2} - \left(\frac{L}{6} + \Delta L\right), \text{ despejando } \Delta L \\
\Rightarrow \Delta L &= \frac{L}{3}
\end{aligned}$$

Ya obtenida la magnitud del desplazamiento, vea *¿en qué sentido debe realizarse el desplazamiento de la barra?*, intente identificarlo.

c) *Indicación:* Utilizar el ángulo $\alpha + \Delta\alpha$, pues como $\alpha$ es conocido hay que buscar despejar $\Delta\alpha$.

**P3.-** Una tabla de longitud L y masa m reposa sobre un cilindro de radio R y masa M, como se muestra en la figura. La distancia horizontal entre el punto de apoyo de la tabla en el suelo y el centro del cilindro es D. Entre el suelo y el cilindro hay un coeficiente de roce estático u1. Entre el suelo y la tabla el coeficiente de roce estático es u2. Entre el cilindro y la tabla no hay roce. ¿Cuáles son los valores mínimos de u1 y u2 para que el sistema esté en equilibrio estático?

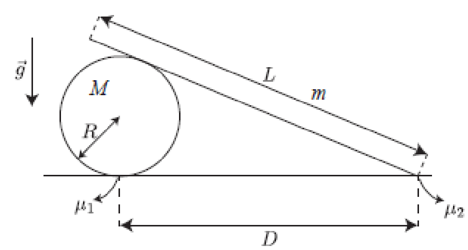



Figura 6.3: Barra con pivote.

**Desarrollo.** Las ecuaciones de movimiento para el cilindro están dadas por:

$$\sum \vec{\tau}_{cm} = (...) - (\vec{r}_{R_1} \times \vec{R_1}) = 0$$
$$\sum F_x = R_1 - N_3 \sin(\alpha) = 0$$
$$\sum F_y = N_1 - Mg - N_3 \cos(\alpha) = 0$$

Mientras que las ecuaciones de movimiento para la barra son:

$$\sum \vec{\tau}_{\text{Suelo}} = \left(\frac{L}{2}\hat{r}_P \times m\vec{g}\right) - (D\hat{r}_{N_3} \times \vec{N_3}) = 0$$
$$\sum \vec{F_x} = -R_2 + N_3 \sin(\alpha) = 0$$
$$\sum \vec{F_y} = N_2 + N_3 \cos(\alpha) - mg = 0$$

Además se tienen las relaciónes del roce y la normal respectivos:

$$R_1 = \mu_1 N_1 \Rightarrow \mu_1 = \frac{R_1}{N_1}$$
$$R_2 = \mu_2 N_2 \Rightarrow \mu_2 = \frac{R_2}{N_2}$$

Luego es importante notar que por utilizar Leyes de Newton se tendrán 6 ecuaciones con 5 incógnita, luego es posible resolver el sistema de ecuaciones enunciado, para ello no es necesario utilizar la ecuación de torque del cilindro (sistema de 5 ecuaciones lineales y 5 incógnitas)

*Queda propuesto despejar las incógnitas.*

**P4.-** En la figura se muestra un cilindro de masa M y radio R, el cual se ata a la muralla mediante una cuerda. Alrededor de un calado que se le ha hecho al cilindro se enrolla una cuerda ideal. De la cuerda cuelga una masa m por determinar. Si el coeficiente de roce entre el suelo y el cilindro es u, determine la masa máxima a colgar para que el cilindro no rote.

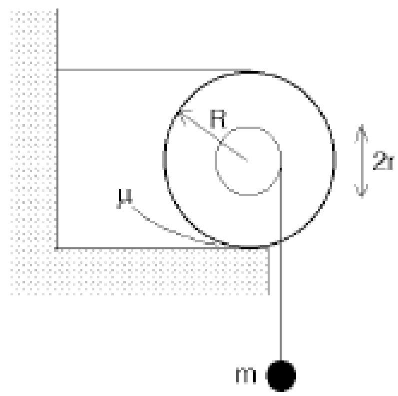



Figura 6.4: Figura problema 1.

**P5.-** La figura muestra una tortuga de masa m caminando con velocidad constante v(0) sobre una barra de largo L y masa M. La barra cuelga de sus extremos por cuerdas verticales sin masa. En t = 0 la tortuga está en el extremo izquierdo de la barra. Encuentre y grafique las tensiones de la cuerda en función del tiempo.
Considere los siguientes valores del problema: $L = 1m$, $M = 500g$, $g = 9,8m/s^2$.

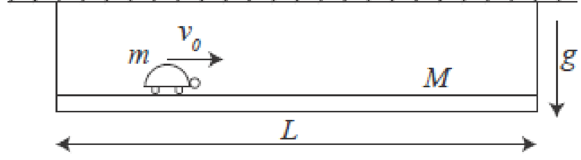



Figura 6.5: Figura problema 2.

### 6.6.2. Problemas de dinámica

**P1.-** Considere dos poleas fijas unidas por una correa (o cadena) de transmisión tal como se muestra en la figura adjunta. Una masa M colgada por una cuerda enrollada en la polea nro 1 pone en movimiento el sistema. Suponga que las poleas son discos de radio R y tienen una masa también igual a M (es decir, el momento de inercia de las dos poleas coinciden, teniéndose I=$MR^2/2$). Note que una correa (o cadena) de transmisión sólo puede transmitir una fuerza de tracción. Para el presente problema solo la parte superior de la correa transmite una fuerza entre las poleas.

*a*) Encuentre la tensión T de la cuerda.

*b*) Encuentre la aceleración angular de la polea nro 1.

*c*) Usando la ley de conservación de la energía, encuentre la velocidad v que tiene la masa M después de haber bajado una distancia h. (La masa M parte desde el reposo).

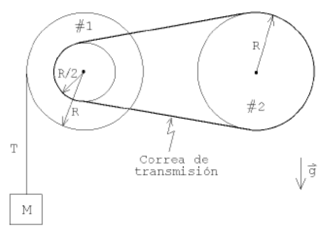



Figura 6.6: Figura problema 3.

**P2.-** Considere la máquina de Atwood mostrada en la figura adjunta. La polea consta de un disco uniforme de masa m (que coincide con el valor de la masa más pequeña colgada de la máquina) y radio R. El momento de inercia para rotaciones en torno al eje de un disco es I =mR2/2. El roce entre la cuerda y la polea hace que esta última gire mientras las masas estén en movimiento. Suponga que la cuerda no tiene masa y que no desliza sobre la polea. La masa 2m parte del reposo desde una altura h.

*a*) Usando el teorema de conservación de la energía, encuentre la velocidad de la masa 2m cuando ésta llega al suelo.

*b*) Encuentre la tensión de la cuerda a ambos lados de la máquina de Atwood. Es decir, encuentre 1 y 2 en función de $m$, $g$ y $R$. (Cuando el momento de inercia de la polea no se puede despreciar (lo que es el caso del presente problema) entonces la tensión de la cuerda no es la misma a ambos lados de la polea.)

*c*) Encuentre la tensión de la cuerda que sujeta la polea mientras las masas están en movimiento.

*d*) Encuentre la tensión de la cuerda que sujeta la polea después de que la masa 2m llega al suelo (y todas las componentes de la máquina de Atwood están en reposo).

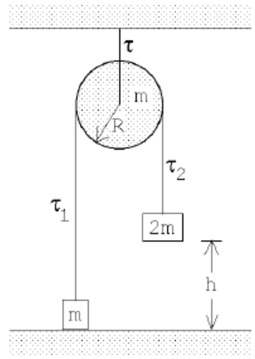



Figura 6.7: Figura problema 4.

### 6.6.3. Problemas de rodadura

*Comentario.* En los siguientes problemas se presentan modelos en los cuales se cumple la condición de rodadura en un punto $o$, en el que se cumple que la velocidad traslacional es nula.

**P1.-** Un yo-yo está formado por dos discos uniformes cada uno de masa $M$ y radio $R$. Uniendo estos discos hay un eje de radio $r$ y masa despreciable. Un hilo se enrolla en torno a este eje y su extremo se sostiene desde una cierta altura. En un instante, el yo-yo se deja caer, partiendo del reposo. Inicialmente se encuentra a una distancia $D$, del extremo superior del hilo. Encuentre la aceleración del centro del yo-yo.

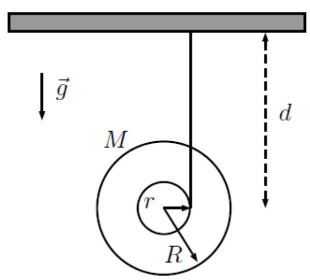



Figura 6.8: Figura problema 1.

*A continuación se realizarán en paralelo las sumas de torque con sus respectivas inercias con respecto al centro de masas y al punto de giro, para ver la equivalencia de esto.*

**Desarrollo.** Se tiene que la suma de torque se puede realizar respecto distintos puntos, respecto al centro de masas y respecto al punto en el que hay rodadura:

$$\sum \tau_o = I_o \alpha$$
$$\sum \tau_{cm} = I_{cm} \alpha$$

Pero claramente el torque calculado en puntos distintos es de una magnitud distinta, pero además, por el teorema de Steiner se tiene que las inercias son:

$$I_o = I_{cm} + md^2$$
$$\Rightarrow I_o \geqslant I_{cm}$$

Luego, cuando se desea describir un movimiento angular, $\alpha$ es independiente del punto puesto que es igual en todos los puntos del sistema, se debe decidir respecto a que punto calcular el torque, pero, ¿cómo se debe decidir el punto donde calcularlo?.
Se tomará como hipótesis que el torque calculado en el punto p es mayor al torque calculado en el centro de masas, ya que en términos de los módulos se tiene que:

$$\frac{\tau_{cm}}{I_{cm}} = \frac{\tau_p}{I_p} = \alpha$$

*Conclusión:* No importa en que punto es calculado el torque, pero hay casos en los cuales elegir un buen punto, facilita mucho el desarrollo de las ecuaciones.
Luego calculando el torque en ambos puntos (para comparar), ya que hay dos fuerzas (peso y tensión) perpendiculares al brazo del torque, se tiene que:

$$\sum \tau_{cm} = Tr = I_{cm}\alpha$$
$$\sum \tau_o = (M+m)gr = I_o\alpha$$

Luego, calculando la inercia, y aplicando teorema de Steiner en el caso del punto $o$, se tiene que:

$$I_{cm} = \frac{mr^2}{2} + \frac{MR^2}{2}$$
$$I_o = \frac{mr^2}{2} + mr^2 + \frac{MR^2}{2} + Mr^2$$

Luego reemplazando las inercias en las ecuaciones del torque se tiene:

$$\sum \tau_{cm} = Tr = (\frac{mr^2}{2} + \frac{MR^2}{2})\alpha$$
$$\sum \tau_o = (M+m)gr = (\frac{mr^2}{2} + mr^2 + \frac{MR^2}{2} + Mr^2)\alpha$$

Ahora se desea despejar la aceleración angular, pero es posible notar que en la ecuación de torque respecto al centro de masas la fuerza de tensión $T$ es una incógnita, la cual se puede despejar realizando sumatoria de fuerza en el eje Y.

$$\sum F_y = T - (M+m)g = (M+m)a_{cm}$$
$$\Rightarrow T = (M+m)a_{cm} + (M+m)g = (M+m)(g + a_{cm})$$

Luego evaluando en la ecuación de torque:

$$(M+m)(g+a_{cm})r = (\frac{mr^2}{2} + \frac{MR^2}{2})\alpha$$

Pero, ahora no es posible despejar $\alpha$, ya que se encuentra en función de $a_{cm}$. *Indicación:* Recuerde las ecuaciones de movimiento circular uniforme, en particular la ecuación de la aceleración. Donde, $r_o$ es la posición del punto donde se desea calcular la aceleración $a_o$ respecto al eje de giro.

$$a_o = r_o\alpha$$

Como en el problema se busca la aceleración del centro de masas, basta con reemplazar $\alpha$ en la ecuación que relaciona $\alpha$ y $a_{cm}$ para despejar lo buscado

$$(M+m)(g+a_{cm})r = (\frac{mr^2}{2} + \frac{MR^2}{2})\frac{a_{cm}}{r}$$

También es bueno notar que si se despeja $\alpha$, es posible calcular la aceleración lineal en cualquier punto del yo-yo.

**Ejemplo - Calculando la energía cinética:** La energía cinética total se puede descomponer en la energía cinética de distintas contribuciones de velocidades (traslacionales y rotacionales).

$$K_t = K_r + K_l$$

Calculando la energía cinética respecto al centro de masas:

$$K_r = \frac{I_{cm}w^2}{2}$$
$$K_l = \frac{(m+M)v_{cm}^2}{2}$$

En cambio, calculando la energía cinética, respecto al punto del giro se tiene que:

$$K_r = \frac{I_p w^2}{2}$$
$$K_l = \frac{(m+M)v_p^2}{2}$$

Pero en el punto de giro, por rodadura, se tiene que la velocidad traslacional es nula, entonces:

$$K_l = \frac{(m+M)v_p^2}{2} = 0$$

Luego la energía cinética total es independiente del punto donde sea calculada, entonces es posible igualar las energías respecto a puntos diferentes:

$$K_{t.p} = K_{t.cm} \Rightarrow \frac{I_p w^2}{2} = \frac{I_{cm} w^2}{2} + \frac{(m+M)v_{cm}^2}{2}$$

Por movimiento circular uniforme se tiene que $wr_{cm} = v_{cm}$

$$\begin{aligned}
\frac{I_p w^2}{2} &= \frac{I_{cm} w^2}{2} + \frac{(m+M)(wr_{cm})^2}{2}, \ / \cdot \frac{1}{w^2} \\
\frac{I_p}{2} &= \frac{I_{cm}}{2} + \frac{(m+M)r_{cm}^2}{2} \\
I_p &= I_{cm} + (m+M)r_{cm}^2
\end{aligned}$$

*Conclusión:* El desplazamiento del teorema de Steiner se desprende de la ecuación de energía.

**P2.-** Se tienen dos cilindros de masas $M_a$ y $M_b$, radios $R_a$ y $R_b$ y momentos de inercia respecto a sus centros $I_a$ e $I_b$, tales que:

$$\frac{I_A}{M_A R_A^2} > \frac{I_B}{M_B R_B^2}$$

Los cilindros se mueven sobre un plano inclinado en un ángulo, rodando sin resbalar, debido al roce estático con la superficie. Los cilindros están unidos por su centro mediante una cuerda ideal que forma un ángulo con respecto al plano inclinado.

*a*) Determine la aceleración del sistema.

*b*) Calcule la tensión de la cuerda.

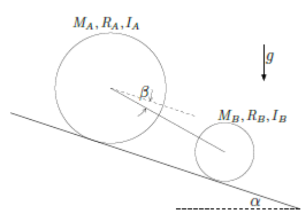



Figura 6.9: Figura problema 2.

**Desarrollo.**

*a*) Se calcula el torque respecto a los puntos de rotación de ambos cilindros (donde tocan el suelo):

$$\tau_{pa} = R_a M_a g sen(\alpha) + R_a T cos(\beta) = I_{pa}\alpha_a$$

$$\tau_{pb} = R_b M_b g sen(\alpha) - R_b T cos(\beta) = I_{pb}\alpha_b$$

También es posible calcular el torque respecto a los centros de masa de ambos cilindros:

$$\tau_{oa} = -R_a F_{ra} = I_a \alpha_a$$

$$\tau_{ob} = -R_b F_{rb} = I_b \alpha_b$$

Como la cuerda está tensa en cualquier instante de tiempo, ambos cuerpos se mueven con igual aceleración del centro de masas (paralela al plano inclinado). Además, por rodadura se tiene lo siguiente:

$$a_{cm} = R_a \alpha_a$$

$$a_{cm} = R_b \alpha_b$$

Por comodidad, es conveniente utilizar las ecuaciones de torque descritas en 30 y 31, de las cuales se despejan las fuerzas de roce y se evalúan las condiciones de rodadura:

$$F_{ra} = \frac{-I_a a_{cm}}{R_a^2}$$

$$F_{rb} = \frac{-I_b a_{cm}}{R_b^2}$$

Por otro lado, se debe complementar el uso de las ecuaciones de torque con el uso de las ecuaciones de fuerza, en este caso, se recomienda calcular la ecuación de fuerza para el sistema completo (es equivalente a calcular las ecuaciones de fuerza de cada componente del sistema), la cual queda:

$$(M_a + M_b)a_s = (M_a + M_b)gsen(\alpha) - F_{ra} - F_{rb}$$

Despejando la aceleración del sistema y reemplazando las ecuaciones 34 y 35 se tiene:

$$a_s = \left(\frac{I_b}{R_b^2} + \frac{I_a}{R_a^2}\right)\frac{a_{cm}}{M_a + M_b} + gsen(\alpha)$$

Luego, como la aceleración del sistema corresponde a las aceleraciones de ambos centros de masas, que por lo demás son iguales, entonces se tiene:

$$a = gsen(\alpha)\left(1 - \frac{\left(\frac{I_b}{R_b^2} + \frac{I_a}{R_a^2}\right)}{M_a + M_b}\right)^{-1}$$

*b)* Basta con realizar la suma de fuerzas para alguno de los dos cuerpos aislados, en este caso, para el cuerpo A se tiene:

$$\sum F_a = M_a a_{cm} = M_a gsen(\alpha) + Tcos(\beta) - F_{ra}$$

Luego despejando la tensión, y evaluando 34 y 38 se obtiene la tensión de la cuerda. También es posible realizar un procedimiento análogo calculando la suma de fuerza para el cuerpo B, y evaluando las ecuaciones 35 y 38 (se recomienda realizarlo y corroborar).
*Observación:* Al realizar la suma de fuerzas de ambos cilindros por separado, se obtiene una ecuación equivalente a la que se obtiene realizando suma de fuerzas al sistema completo, discuta, averigue o consulte ¿por qué ocurre?

**P3.-** Un cilindro de radio $a$ y masa $m$ se encuentra en el punto más alto de un semicilindro de radio $R$, con el cual tiene un coeficiente de roce estático $\mu$. En cierto instante, el cilindro es sacado de su punto de equilibrio y comienza a rodar sin resbalar sobre el semicilindro.

*a*) Plantee la ecuación de movimiento del centro de masa del cilindro mientras que éste rueda sin resbalar.

*b*) Encuentre la velocidad del centro del cilindro en función del ángulo *theta* mientras que rueda sin resbalar.

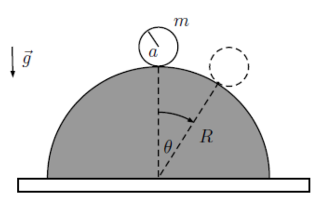



Figura 6.10: Figura problema 3.

**P4.-** La figura muestra una barra de masa $M$ y largo $L$ que puede rotar sin roce con respecto a su extremo $O$. Del otro extremo se sujeta un disco de radio $R$ al que le falta un agujero de radio $R/2$. La densidad del disco uniforme es $\rho$. El sistema se suelta desde el reposo con la barra formando un ángulo $_o$ con respecto al eje vertical, luego cae por efecto de la gravedad.

*a*) Determine el momento de inercia del sistema con respecto al punto de rotación.

*b*) Determine la velocidad con la que pasa el centro del disco por la vertical.

**P5.-** *Comparación de rodadura y deslizamiento:* Un disco de masa $m$ y radio $r$ rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal luego de haber recibido un impulso inicial. Despreciando efectos del roce con el aire, si la velocidad sobre el centro de masas es $\vec{V} = v\hat{x}$ y su velocidad de giro es $w_0$.

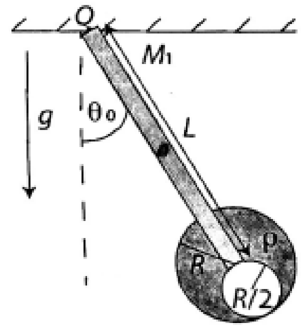



Figura 6.11: Problema 1.

*a*) Escriba la condición de rodadura en términos de la velocidad del centro de masas y la velocidad angular.

*b*) Identifique si sobre algún punto la velocidad neta es nula. ¿Cuál sería el punto?, ¿por qué?.

*c*) Calcule el periodo de rotación, la frecuencia de rotación, la velocidad neta sobre el centro de masas y la velocidad neta sobre el punto de mayor altura del cilindro.

*d*) Suponiendo ahora que $v > rw_0$, descomponga en un dibujo la velocidad neta en dos fenómenos distintos: Rodadura y traslación.

# Bibliografía


[1] H. Massman, V. Muñoz, Introducción a la mecánica, Apunte.

[2] R. Resnick, D. Halliday, K.S. Krane, Physics, Volumenes 1 y 2, 5th Edition, 2001

[3] R. A. Serway, J. W. Jewett. Física para ciencias e ingenierías, 9na. Edición Vol 1 y 2. 2014.

[4] P. Tipler. Física para las ciencias y la tecnología. 4ª ed. 1999.