En un sistema de n partículas de masa m_i y posición $\vec{r}_i$ cada una, tendremos que:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

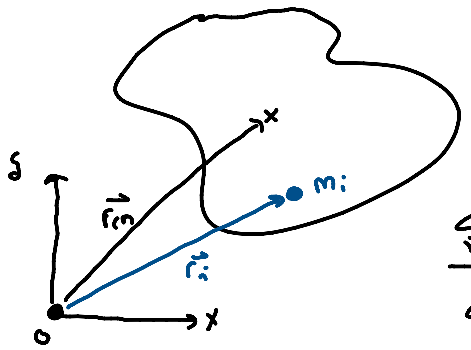
$$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Derivando.

Derivando.

Integrando.



$\sum_{i=1}^{n} m_i = M_t$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \cdot m_i}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i}_{M_{total}}} = \vec{r}_{CM}$$ tiene propiedades con la energía potencial gravitatoria.

Veamos que la $\vec{V}_{CM}$ es dada según:

$$\vec{V}_{cm} = \dot{\vec{r}}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{r}}_i m_i}{M_t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i m_i}{M_t}$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{M_t \cdot \vec{V}_{CM}}_{} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i m_i$$ Momentum del sistema de partículas.

Derivando se tiene $M_t \vec{a}_{cm}$ (*)

Mientras que la $\vec{a}_{cm}$ es dado según:

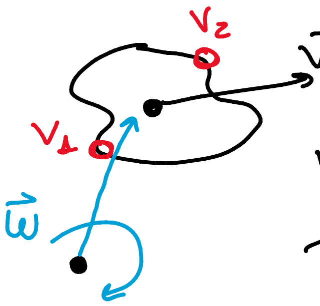
$$\vec{a}_{cm} = \dot{\vec{V}}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i m_i}{M_t}$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{M_t \vec{a}_{cm}}_{(*)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i m_i$$

↳ Se cumplen las leyes de Newton !

¿Cómo es la energía mecánica en un sist. de partículos?

$$E = K + U = \underbrace{\frac{m_t \cdot V_{cm}^2}{2} + m g h_{cm}}_{\text{Extiende la física puntual a sólidos rígidos.}} + \underset{(*)}{\text{Otros términos.}}$$



$\vec{V}_{cm}$ de traslación

$V_1 < V_2$ velocidades netas en los puntos (1) y (2)

Tendremos energía $K_{rot} = \frac{I_{CM} \omega^2}{2}$

con I_{cm} inercia en el centro de masas.
La inercia es tan análoga a la masa que:

$$\sum F_i^{ext} = m \cdot a$$

$$\sum \tau_{i,cm}^{ext} = \underbrace{I_{cm} \cdot \alpha}_{\text{muere}} = 0 \text{ (estático).}$$

<u>Obs:</u> El torque depende del sist. de referencias. (Más adelante veremos el detalle)

→ Torque, dinámico de s.r

→ Inercia, teo. de Steiner.

El torque es la consecuencia del efecto de una fuerza aplicada en un sistema de particulas, el torque genera rotaciones, el torque para alguna fuerza i-ésima es:

$$\vec{T}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

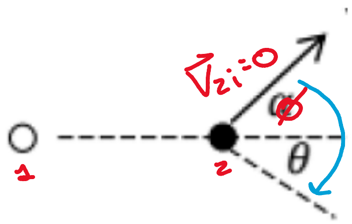
Así mismo, el torque aplicado por el peso está dado por la siguiente ecuación, puesto que el peso se aplica sobre el centro de masas del sistema:

$$\vec{T}_{\vec{p}} = M(\vec{r}_{cm} \times \vec{g})$$

Luego, la suma de todos los torques que aplican sobre el sistema corresponden a:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{T}_{i,o} = \vec{\alpha} I_o, \text{ en el caso dinámico}$$
$$= 0, \text{ en el caso estático}$$

P1 Conservación del momentum lineal en un choque: Una partícula colisiona a una segunda partícula de igual masa que estaba inicialmente en reposo. Si colisionan ~~elásticamente~~ sobre un plano horizontal libre de roce, determine el ángulo ϕ de salida de la partícula inicialmente en reposo si la primera partícula se desvía un ángulo θ respecto de la dirección que traía antes de la colisión.



Masas iguales

$\underbrace{\phi+\theta}_{=\measuredangle ab} = \frac{\pi}{2}$ (por ver)

Para comenzar, vemos conservación de $\vec{P}$:

$$\vec{P}_0 = m\vec{V}_{10} + m\cancel{\vec{V}_{20}}^{\,0} = m\vec{V}_{10}$$

$$\vec{P}_f = m\vec{V}_{1f} + m\vec{V}_{2f}$$

$\vec{P}_0 = \vec{P}_f$

$$\Rightarrow \cancel{m}\vec{V}_{10} = \cancel{m}\vec{V}_{1f} + \cancel{m}\vec{V}_{2f}$$

$$\Leftrightarrow \vec{V}_{10} = \vec{V}_{1f} + \vec{V}_{2f} \qquad \text{(eq 1)}$$

Veamos la conservación de la energía:

→ Producto punto:
$V_{10}^x \cdot V_{10}^x + V_{10}^y \cdot V_{10}^y$
$(V_{10}^x)^2 + (V_{10}^y)^2 = |\vec{V}_{10}|^2$

$$E_0 = \frac{m \cdot V_{10}^2}{2} = \frac{m(|\vec{V}_{10}|^2)}{2} = \frac{m(\vec{V}_{10} \cdot \vec{V}_{10})}{2}$$

$$E_f = m V_{1f}^2 + m V_{2f}^2$$

$$E_f = \frac{m V_{1f}^2}{2} + \frac{m V_{2f}^2}{2}$$

$$\overset{E_0 = E_f}{\Longrightarrow} \quad \frac{m(\vec{V}_{10} \bullet \vec{V}_{10})}{2} = \frac{m V_{1f}^2}{2} + \frac{m V_{2f}^2}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \vec{V}_{10} \bullet \vec{V}_{10} = V_{1f}^2 + V_{2f}^2 \qquad (\text{eq } 2)$$

Luego como $\vec{V}_{10} = \vec{V}_{1f} + \vec{V}_{2f}$ (eq 1)

$$\Rightarrow \vec{V}_{10} \bullet \vec{V}_{10} = (\vec{V}_{1f} + \vec{V}_{2f}) \bullet (\vec{V}_{1f} + \vec{V}_{2f})$$

$$= |\vec{V}_{1f}|^2 + |\vec{V}_{2f}|^2 + 2\vec{V}_{1f} \bullet \vec{V}_{2f} \quad (\text{eq } 3)$$

Reemplazando eq 3 en eq 2

$$\Longrightarrow V_{1f}^2 + V_{2f}^2 + \underbrace{2\vec{V}_{1f} \bullet \vec{V}_{2f}} = V_{1f}^2 + \vec{V}_{2f}$$

$$\Longrightarrow 2\vec{V}_{1f} \bullet \vec{V}_{2f} = 0$$

Como:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\measuredangle ab) \Big\} \text{Def. del} \bullet \text{con ángulo.}$$

$$\Longrightarrow \vec{V}_{1f} \cdot \vec{V}_{2f} = 0 \Longleftrightarrow \cos(\measuredangle ab) = 0$$

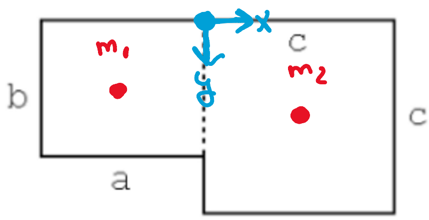
$$\measuredangle ab = \underbrace{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}_{k=0} \vee \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \, k \in \mathbb{Z}$$

Luego $\measuredangle ab = \frac{\pi}{2}$ (aunque hay más soluciones).

donde $\measuredangle ab = \theta + \phi = \frac{\pi}{2}$

P3 Cálculo de centros de masas:

1. Encuentre la posición del centro de masas de una lámina de densidad (de masa) uniforme σ y que tiene la forma indicada en la figura adjunta.
2. Encuentre la posición del centro de masas de un disco de densidad uniforme σ y espesor despreciable, que además presenta un agujero circular como indica la figura.



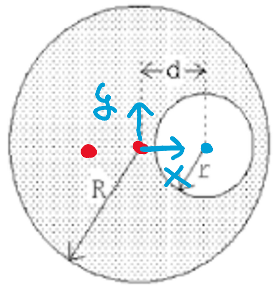
$\vec{r}_1 = (-a/2\,,\, b/2)$

$\vec{r}_2 = (c/2\,,\, c/2)$

además $\left.\begin{aligned} m_1 &= \sigma\, ab \\ m_2 &= \sigma\, c^2 \end{aligned}\right\} M_t = \sigma\,(ab + c^2)$

$$\Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{\sigma ab \cdot \begin{pmatrix} -a/2 \\ b/2 \end{pmatrix} + \sigma c^2 \begin{pmatrix} c/2 \\ c/2 \end{pmatrix}}{\sigma\,(ab + c^2)}$$

$$= \left[\hat{\imath}\left(-\frac{a^2 b}{2} + \frac{c^3}{2}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{ab^2}{2} + \frac{c^3}{2}\right)\right]\frac{1}{ab + c^2}$$



$\vec{r}_1 = (0,0)$ suponiendo que es un disco sin huecos.

$\vec{r}_2 = (d,0)$ el centro de masas de lo que falta.

$m_1 = \sigma \pi R^2 \;\wedge\; m_2 = \sigma \pi r^2$

$$\Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{\cancelto{0}{\vec{r}_1} \cdot m_1 - \vec{r}_2 m_2}{m_1 - m_2} = \frac{-(d,0)\,\cancel{\sigma\pi} r^2}{\cancel{\sigma\pi}\,(R^2 - r^2)}$$

$(-)$ pues es lo que falta.

$$= \frac{-(d,0)\, r^2}{R^2 - r^2}$$

$$= -\hat{\imath}\,\frac{d\, r^2}{R^2 - r^2} \quad //$$

Despeje de este término.

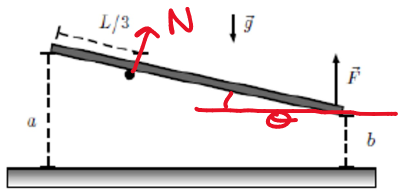
Esto se puede porque $\vec{r}_1 = \dfrac{\vec{r}_{CM}(m_1 - m_2) + \vec{r}_2\, m_2}{(m_1 - m_2) + m_2}$

Es el cuerpo completo.

P4 Estática en sistemas extendidos:

Se tiene una barra homogénea de masa M y largo L, que se sostiene en un pivote a una distancia L/3 de su extremo izquierdo. Su extremo izquierdo está a una altura a desde el piso, mientras que su extremo derecho está a una altura b, con a >b como se muestra en la figura. En el extremo derecho de la barra se ejerce una fuerza de magnitud F en el sentido vertical.

1. Calcule la magnitud F de la fuerza para que la barra esté en equilibrio estático.
2. Si se comienza a mover la barra sin variar su inclinación, ¿Cuánto debe desplazarse para que la magnitud de la fuerza ejercida sea F=Mg/2?
3. Desde la configuración inicial, piense que ahora la barra no se desplaza pero varía el ángulo de inclinación, calcule el ángulo para que la fuerza sea igual que en la parte b



1) Hay que calcular $\Sigma \vec{F}$ y $\Sigma \vec{\tau}$.

Antes de eso, debemos conocer la inclinación de la barra:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{L^2-(a-b)^2}}{L} \quad \wedge \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{a-b}{L}$$

$$\Rightarrow \theta = \underbrace{\operatorname{sen}^{-1}}_{\neq \frac{1}{\operatorname{sen}(\cdot)}}\left(\frac{a-b}{L}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{a-b}{L}\right)$$

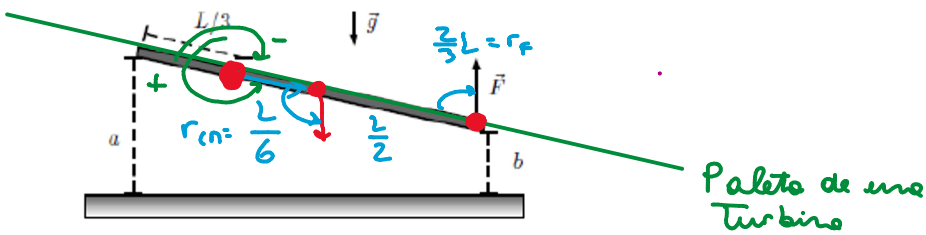
Veamos las ecuaciones de mov:

$$F_x = N_x = 0$$

$$F_y = N_y - mg + F = 0 \Rightarrow N_y = mg - F$$

$$\vec{\tau}_o = \vec{r}_{cm} \times \vec{P} + \vec{r}_F \times \vec{F}$$

Diag. Torque



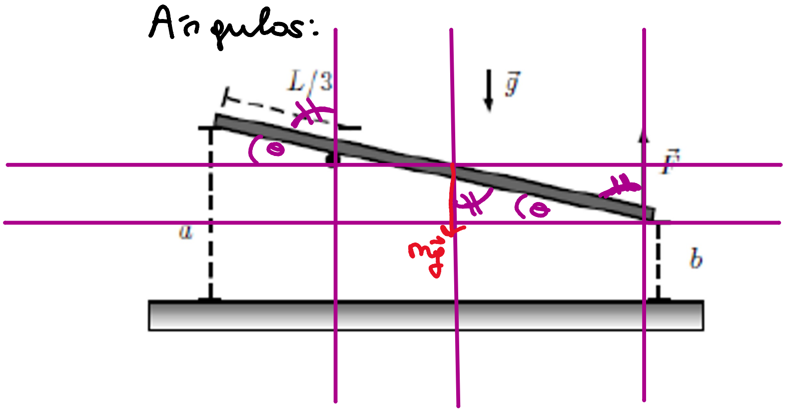
$$\vec{a} \times \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot \operatorname{sen}(\measuredangle ab)$$ → La dirección a→b importa pero el sentido

$\bar{a} \times b = |a| \cdot |b| \cdot \operatorname{sen}(\measuredangle ab)$ → la dirección $a \to b$ importa ↻ pero el sentido

$$= -\frac{L}{6}\frac{mg}{}\cdot \operatorname{sen}(\measuredangle_1) + \frac{2LF}{3}\operatorname{sen}(\measuredangle_2) = 0$$

Obs: $\measuredangle_1 = \frac{\pi}{2} = \theta \;\wedge\; \measuredangle_2 = \theta$, ver ángulos opuestos por el vértice.

Ángulos:



$\measuredangle_1$ y $\measuredangle_2$ son conocidos.

Obs: Se puede calcular en O = CM y en O = pivote. ✓
Si calculamos τ_{cm}, este depende de N_y
lo que se despeja de $\vec{F}_y$.

$$-\frac{L\,mg}{6}\cdot \cancel{\operatorname{sen}(\measuredangle_1)} + \frac{2LF}{3}\cancel{\operatorname{sen}(\measuredangle_2)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{mg}{6}\cdot\frac{3}{2} = F \Rightarrow \frac{mg}{4}\hat{j} = \vec{F}$$