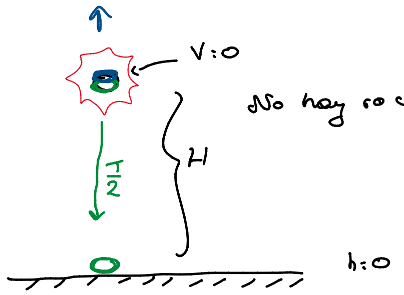
Desarrollo auxiliar 10

jueves, 9 de julio de 2020 16:09

Problema #1:
Un proyectil es disparado verticalmente hacia arriba de tal forma que alcanza una altura máxima H en un tiempo T. En el punto más elevado de la trayectoria el proyectil explota dividiéndose en dos fragmentos de masas iguales. Tras un tiempo $T/2$, después de la explosión, uno de los fragmentos cae en el lugar del disparo. Despreciando el roce con el aire, ¿cuánto tiempo después impactarpa el segundo fragmento en el lugar de disparo?



→ Notación:
Baja (1)
Sube (2)

1ero: cuando alcanza la altura H, la velocidad es nula.

2do: La explosión da un impulso tal que se conserva el momentum.

Se conserva el momentum en torno a la "explosión", donde:

$$\vec{P}_i = \vec{0} \qquad \Rightarrow \begin{cases} P_i = 0 \\ P_f = \frac{m}{2}(V_2 - V_1) \end{cases} \qquad \Rightarrow 0 = \frac{m}{2}(V_2 - V_1)$$

$$\vec{P}_f = \left(\frac{m}{2}V_2 - \frac{m}{2}V_1\right)\hat{y} \qquad \therefore V_2 = V_1 =: V$$

Luego, las ecuaciones de itinerario son:

$$y_1(t) = y_0 + V_0 t + \frac{a t^2}{2} \quad \wedge \quad y_2(t) = y_0 + V_0 t + \frac{a t^2}{2}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{(Baja)}}{y_1(t) = H - Vt - \frac{g t^2}{2}} \quad \wedge \quad \underset{\text{(Sube)}}{y_2(t) = H + Vt - \frac{g t^2}{2}}$$

(1) se demora $\frac{T}{2}$ en bajar

$$\Rightarrow 0 = H - V\frac{T}{2} - \frac{g T^2}{8}$$

$$\Rightarrow V = \frac{2H}{T} - \frac{gT}{4} \longrightarrow \text{Corresponde a } V_1 \text{ y } V_2$$

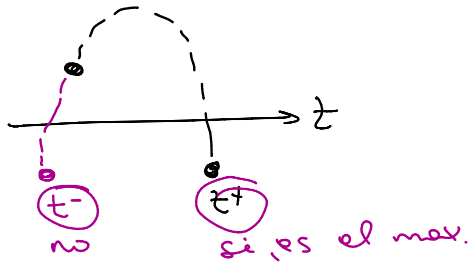
Luego se busca t^* tal que $y_2(t^*) = 0$

$$\Rightarrow 0 = \underbrace{H}_{c} + \underbrace{\left(\frac{2H}{T} - \frac{gT}{4}\right)}_{b} t^* - \underbrace{\frac{g t^{*2}}{2}}_{a}$$

teniendo una ec. cuadrática para t^*, hay que calcular sus raíces:

$$t^* := \frac{V}{g} \pm \sqrt{\frac{V^2}{g^2} + \frac{2H}{g}}$$

$$t^* := \frac{V}{g} \pm \sqrt{\frac{V^2}{g^2} + \frac{2H}{g}}$$



→ Notar que $\sqrt{\frac{V^2}{g^2} + \frac{2H}{g}} > \frac{V}{g}$

⇒ Basta con tomar (+).

Trabajar la expresión:

$$= \left(\frac{2H}{gT} - \frac{T}{4}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{g^2}\left(\frac{2H}{T} - \frac{gT}{4}\right)^2 + \frac{2H}{g}}$$

$$= \left(\frac{2H}{gT} - \frac{T}{4}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{g^2}\left(\frac{4H^2}{T^2} + \frac{g^2T^2}{16} - \frac{gH\cancel{T}}{\cancel{T}}\right) + \frac{2H}{g}}$$

$$= \left(\frac{2H}{gT} - \frac{T}{4}\right) \pm \left(\frac{1}{g^2}\left(4\frac{H^2}{T^2} + \frac{g^2T^2}{16} - gH\right) + \frac{2H}{g}\right)^{1/2}$$

luego tomando max h·φ se equivale a ver lo que está en morado

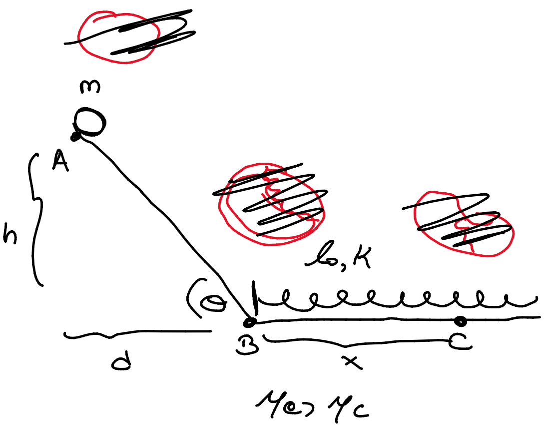
No es lo más ortodoxo.

Luego: $\Delta t = t^* - \frac{T}{2} = \frac{V}{g} + \sqrt{\frac{V^2}{g^2} + \frac{2H}{g}} - \frac{T}{2}$ //

corresponde al tiempo que (1) toca el piso hasta que (2) toque el piso

Problema #2:

Un cuerpo de masa m es soltado sobre un plano inclinado desde una altura h. El extremo inferior del plano inclinado empalma con un plano horizontal donde se encuentra un resorte ideal no elongado (con una placa de masa despreciable) de constante k y longitud natural l_0. Considerando que hay roce cinético μ_c y estático μ_e a lo largo de toda la trayectoria (diagonal y horizontal). Calcule el coeficiente de roce μ_e para que la masa se quede detenida en la posición de compresión máxima del resorte.



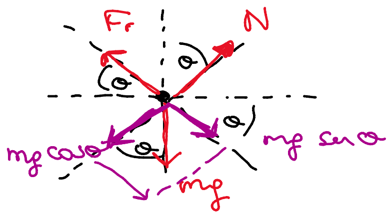
Tenemos que de geometría se desprende:

$\overline{AB} = \sqrt{d^2+h^2}$; $\cos\theta = \frac{d}{\sqrt{d^2+h^2}}$; $\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{\sqrt{d^2+h^2}}$

Como el roce es una fuerza disipativa:

$$E_i = E_f + \underbrace{W_{Fr}}_{\text{calor o deformaciones.}}$$

donde $W_F = \vec{F}\cdot\vec{d}$, calculemos $\vec{F_r}$:



$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow N - mg\cos\theta = 0 \\ \Rightarrow N = mg\cos\theta \\ \Rightarrow F_r = mg\mu_c\cos\theta \end{array}\right.$$

Luego $|W_{AB}^{F_r}| = |F_r\cdot\sqrt{d^2+h^2}|$

$$= \underbrace{\left|\frac{-mg\mu_c d\cancel{\sqrt{d^2+h^2}}}{\cancel{\sqrt{d^2+h^2}}}\right|}$$ → Ver los signos

$= mg\mu_c d$ ← es conocido el trabajo del roce.

Se sabe que $E_A = mgh$

$E_B = \frac{mV^2}{2}$

$$\Rightarrow mgh = \frac{mV^2}{2} + |mg\mu_c d|$$

$$\Rightarrow V^2 = 2g(h - d\mu_c)$$ ← Basta con V^2

$$\omega_{BC} = -\mu_c mg\underbrace{x}_{\text{compresión}}$$

$$\left.\begin{array}{l} E_B = \frac{mV^2}{2} \\ E_c = \frac{Kx^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{mV^2}{2} = \frac{Kx^2}{2} + \mu_c mgx$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_c = \frac{mV^2 - Kx^2}{mgx}}$$

Problema #5 - Control 3 Fi1001 2016-1

Una partícula colisiona a una segunda partícula de igual masa que estaba inicialmente en reposo. Si colisionan elásticamente sobre un plano horizontal libre de roce, determine el ángulo ϕ de salida de la partícula inicialmente en reposo si la primera partícula se desvía un ángulo θ respecto de la dirección que traía antes de la colisión.

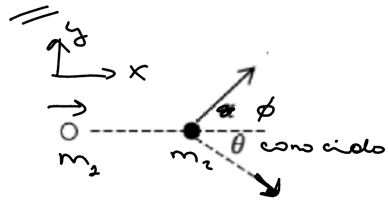


FIGURE 3. Problema 5: Colisión de partículas de igual masa.

Por conservación del momentum $\vec{P_i} = \vec{P_f}$

$$\Rightarrow m_1\vec{V_{1i}} + m_2\cancel{\vec{V_{2i}}}^{\,0} = m_1\vec{V_{1f}} + m_2\vec{V_{2f}}$$

$$\Rightarrow m_1 \vec{V}_{1i} = m_1 \vec{V}_{1f} + m_2 \vec{V}_{2f} \rightarrow 2 \text{ ecuaciones} \qquad (1)$$

Como el choque es elástico, se conserva la energía cinética K:

es escalar. (*)

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 V_{1i}^2 \quad \wedge \quad K_2 = \frac{1}{2} m_1 V_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2f}^2$$

$$\Rightarrow m_1 V_{1i}^2 = m_1 V_{1f}^2 + m_2 V_{2f}^2 \qquad (2)$$

Notar que $V_{iti}^2 = V_{iti} \cdot V_{iti}$ } (*)

$$m_1 = m_2 \Rightarrow V_{1i}^2 = V_{1f}^2 + V_{2f}^2$$

$$\vec{V}_{1i} \cdot \vec{V}_{1i} = (\vec{V}_{1f} + \vec{V}_{2f}) \cdot (\vec{V}_{1f} + \vec{V}_{2f})$$

$$= \underline{V_{1f}^2 + V_{2f}^2} + \underbrace{2\vec{V}_{1f} \cdot \vec{V}_{2f}}_{\text{debe ser cero.}}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A||B| \cos(\measuredangle_{AB})$$

$$\Rightarrow 2\vec{V}_{1f} \cdot \vec{V}_{2f} = |V_{1f}||V_{2f}| \underbrace{\cos(\theta + \phi)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \theta + \phi = \frac{\pi}{2} + \underbrace{2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}}_{\text{No tiene importancia}}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} - \theta$$

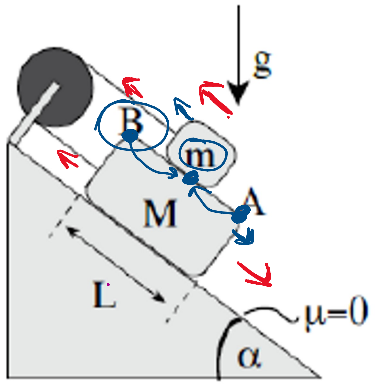


Figura 1: Sistema de bloques y polea sobre un plano inclinado.

$\Sigma F_m = a\,m = T$

$\Sigma F_M = a\,M = T$

$M > m$

$a = 0$ no es el caso

$$v = \frac{d}{t} \; \{ \quad V = \frac{\Delta d}{\Delta t} \quad y \quad \underline{a = \frac{\Delta V}{\Delta t}}$$

$v = \frac{d}{t}$ } $\left(v = \frac{\Delta d}{\Delta t} \right)$ y $\underline{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$

$a = \frac{v}{t}$ } $= \frac{d/t}{t} = \frac{d}{t^2}$ - $\underline{\dot{d} = v}$

$$\boxed{at^2 = d}$$