MA1001 - Introducción al cálculo
Tutoría - Sucesiones, funciones exponencial y logaritmo

Autor: Manuel Torres

Cálculo de límites de sucesiones

P1.- El objetivo del siguiente problema es revisar distintas técnicas para calcular límites de sucesiones, siguiendo las instrucciones propuestas, determine los límites de sucesiones.

a) Multiplicando por un 1 conveniente, de la forma $\frac{1/n}{1/n}$, calcule el siguiente límite:

$$\lim_{n} \left(\frac{2n-2}{1-n} \right)$$

b) Utilice la estrategia implementada en (a), con el fin de hacer 1 al término de mayor orden del denominador para calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n} \left(\frac{2\sqrt{n}-n+3}{n^2+n-7} \right)$$

c) Utilizando que $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ (desracionalizando), calcule el siguiente límite:

$$\lim_{n} \left((\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+2} \right)$$

d) Si las sucesiones $a_n = (-1)^n$ y $b_n = \operatorname{sen}(n)$ son sucesiones acotadas, utilizando las técnicas de las partes anteriores y la proposición de *nula·acotada*, calcule el siguiente límite:

$$\lim_{n} \frac{(-1)^n}{n+\operatorname{sen}(n)}$$

e) 1) Suponiendo que $a_n = \frac{n!}{n^n}$ y $b_n = \frac{a_n}{n!}$ son sucesiones nulas con $a \in \mathbb{R}$, y $k \in \mathbb{N}$, encuentre el límite de la sucesión $c_n = \frac{a^n}{n^n}$.

2) Suponiendo conocido el límite de c_n, y multiplicando por un 1 conveniente calcule el siguiente límite:

$$\lim_{n} \left(\frac{a^n n^k n!}{n^n(1+(n+1)!)} \right)$$

P2.- Propuesto: Para practicar: Calcule los límites de las siguientes sucesiones, para ello utilice las técnicas vistas en el problema anterior:

a) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

b) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

c) $a_n = \dfrac{1}{n^4}\operatorname{sen}(n)$.

d) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{e^n}$.

e) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

f) $a_n = \dfrac{-\cos(\pi n)}{n!}$

P3.- (a) Demuestre que si existe $\lim_n na_n$ (osea que la sucesión es convergente), entonces $\lim a_n = 0$, con a_n una sucesión cualquiera.
Hint: Utilice que una sucesión convergente es acotada.

(b) Sean α, β constantes positivas. Si se sabe que $\lim_n n(\sqrt{n^2+n+1} - (n\alpha + \beta))$ existe, calcule el valor de α y β y luego encuentre el valor del límite.
Hint: Utilice que $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n^2}$ son sucesiones nulas.

Noción de convergencia

A continuación veremos una noción general de sucesión, la cual nos permite introducir de forma conjuntista la noción de entorno/vecindad para poder estudiar la convergencia tanto de sucesiones como más adelante de funciones.

A continuación, se presentan las condiciones necesarias para poder tener un buen conjunto de índices con el fin de poder realizar sucesiones en espacios generales (no necesariamente en $\mathbb{R}$)

Definición 1 (Conjunto dirigido)**.** Sea $(\Lambda, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado[1]. Diremos que es conjunto dirigido si para cada $\alpha, \beta \in$, existe $\gamma \in$ con $\alpha \preceq \gamma$ y $\beta \preceq \gamma$.

Ejemplos.

a) El par $(\mathbb{N}, \leq)$ es un conjunto dirigido, pues $\leq$ es un orden parcial, mientras que es posible verificar que para cualesquiera $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 \leq N$ y $n_2 \leq N$.

b) Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que para todo $i \in I$, $x_0 \in V_i$ con $V_i = (a, b)$ tal que $a < b$, a dicha colección la llamaremos vecindades de x_0.
Note que todos estos conjuntos son no disjuntos, osea que tomando cualquier par $V, U \in \{V_i\}_{i\in I}$, la intersección $U \sqcap V \neq \emptyset$ (es no vacía), más aún $x_0 \in U \sqcap V$, entonces $U \sqcap B \in \{V_i\}_{i\in I}$ (la intersección es vecindad de x_0).
Luego, considerando $(\{V_i\}_{i\in I}, \preceq)$ es conjunto dirigido, donde $U \preceq V \Leftrightarrow U \supseteq V$.

Luego la noción de sucesión, se puede generalizar a lo siguiente:

Definición 2 (Red en $\mathbb{R}$)**.** Sea X un conjunto y $(\Lambda, \preceq)$ un conjunto dirigido. Una red es una función $x : \Lambda \to \mathbb{R}$.

[1] Algunos autores definen conjunto dirigido dejando de lado la antisimetría, ésto quiere decir que no necesariamente se necesita que sea un orden parcial.

Ejemplos.

a) Considerando el conjunto dirigido $(\mathbb{N}, \leq)$ y la red $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, se recupera la noción de sucesión, pues se escribe $x(n) := x_n \in \mathbb{R}$

b) **Spoiler:** La definición de límite de funciones es:

$$(\forall \epsilon > 0), (\exists \delta > 0), |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Dice que tomando como conjunto dirigido las vecindades: $\{(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)\}_{\epsilon > 0}$ (vecindades de x_0), donde $x \to x_0$ entonces $f(x) \to L$ en las vecindades $\{(L - \delta, L + \delta)\}_{\delta > 0}$

Definición 3 (Convergencia de una red)**.** Sea $(\mathbb{R}, (a, b))$ el conjunto de los números reales con (a, b) (intervalos abiertos) la forma general de vecindad de todos sus puntos. Se dice que la red $(x_n)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathbb{R}$ converge a $x_0 \in \mathbb{R}$ si:

$$(\forall V \in \{(a, b)\}_{i \in I}), (\exists \lambda_0 \in \Lambda), (\forall \lambda \geq \lambda_0), x_n \in V$$

Ejemplos.

a) A partir de la definición anterior, se recupera la convergencia de sucesiones mediante la siguiente definición: *Sea* $(\mathbb{R}, (a, b))$ *el conjunto de los números reales con* (a, b) *(intervalos abiertos) la forma general de vecindad de todos sus puntos. Se dice que la sucesión* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *converge a* $x_0 \in \mathbb{R}$ *si:*

$$(\forall V \in \{(a, b)\}_{i \in I}), (\exists n_0 \in \mathbb{N}), (\forall n \geq n_0), x_n \in V$$

Note que para todo $\epsilon > 0$ el intervalo $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ es de la forma (a, b), osea es vecindad de x_0, entonces es posible caracterizar las vecindades del punto límite mediante $\epsilon > 0$.

P4.- Utilizando la siguiente definición de convergencia (denotando por l al punto límite):

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0), |x_n - l| \leq \varepsilon$$

Demuestre que:

a)

$$\lim_n \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

b) **Propuesto:**

$$\lim_n \sqrt{3 - \frac{1}{n^2}} = \sqrt{3}$$

P5.- Sean (a_n) y (b_n) sucesiones tales que $(a_n) \to l$ y $|a_n - b_n| \to 0$. Demuestre utilizando la definición de convergencia que $(b_n) \to l$.
Hint: Utilice la desigualdad triangular: $|u + v| \leq |u| + |v|$.

Funciones exponencial y logaritmo

P6.- Calcule los siguientes límites de sucesiones en las que están presentes las funciones $\exp(\cdot)$ y $\ln(\cdot)$:

a) $\lim\limits_{n} \frac{\ln(n)}{n}$

b) $\lim\limits_{n} \left(1 - \ln\left(e + \frac{1}{n^2}\right)\right) n^2$

c) $\lim\limits_{n} \log_{1+\frac{1}{n}}(e^{\frac{1}{n}})$

d) $\lim\limits_{n} n[n^2(\exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1) - 1]$