Preparación C1

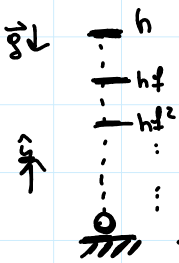
jueves, 18 de junio de 2020 16:17

P1. Tarea 1, sección 4, 2020-1.
Una pelota se lana verticalmente hacia arriba y alcanza una altura máxima h. La pelota cae libremente bajo la acción de la gravedad terrestre y rebota repetidamente, dado que después de cada bote la pelota alcanza una fracción $f < 1$ de un altura previa.

a) Describa la ecuación de itinerario de forma conveniente donde no necesite conocer la velocidad inicial para describir la caída de la pelota, utilizando esto determine el tiempo de un movimiento vertical de subida y bajada. *Hint: Recuerde que el lanzamiento vertical es en cierta forma simétrico.* ✓

b) Encuentre el tiempo total que demora la pelota antes de detenerse. *Hint: Note que el tiempo total puede ser escrito como una serie.* ✓

c) Utilizando el razonamiento anterior, encuentre la distancia total que la pelota viaja.



a)

$$y(t) = y_0 + V_0 t - \frac{g t^2}{2}$$

Podemos usar esto de 2 formas:

1) $t_0 \to y(t) = V_{0y} t - \frac{g t^2}{2}$ } Recorro h

2) $t_0 \to y(t) = h - \frac{g t^2}{2}$ } Recorro h

Obs.:
Conservación de la energía.

$$\frac{m V_{0y}^2}{2} = m g h \Rightarrow V_{0y}^2 = 2 g h$$

El tiempo de subida es igual al tiempo de bajada.

Usando (2) $\to y(t) = h - \frac{g t^2}{2}$

Luego $0 = h - \frac{g t^{*2}}{2}$

$$\Rightarrow \pm\sqrt{\frac{2h}{g}} = t \Rightarrow \sqrt{\frac{2h}{g}} = t_{bajada} = t_{subida}.$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\frac{2h}{g}} = t_0 \quad \text{\} Subir y bajar.}$$

b) Usando que en el bote i-ésimo: $y(t) = h f^i - \frac{g t^2}{2}$ — Luego del bote i-ésimo.

t^* caer

$$\Rightarrow 0 = h f^i - \frac{g t^{*2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow t^* = \sqrt{\frac{2 h f^i}{g}}$$

$$\Leftrightarrow t_i = 2\sqrt{\frac{2 h f^i}{g}}$$

Finalmente T en que la pelota deje de botar es la suma de los t_i anteriores:

$$T = \underbrace{\sum_{i=0}^{N} t_i}_{\text{Sumar Todos los } t_i \text{ (notación)}} = \sum_{i=0}^{N} 2\sqrt{\frac{2 h f^i}{g}} < \infty$$

Para aventurarse: $(N \to \infty^+)$

Sumar todos los t_i (notación)

$$\sim \underbrace{\lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} t_i}\ \longrightarrow \text{número que va a ser } T < \infty^{+}$$

$0, 1, 2, \ldots, \underset{\sim}{n_0}, n_0+1, \ldots, \underline{N}, \ldots, \infty^{+} \in \mathbb{N}$

$\exists n_0$ tal que los términos son nulos.
(Noción de convergencia).

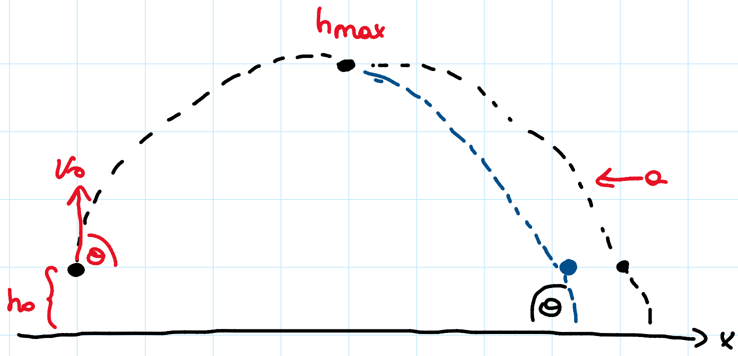
c) En cada ciclo, viajo $2hf^{i}$, $i \in \{0, \ldots, N\}$

$$\Rightarrow \textcircled{d} = \sum_{i=0}^{N} 2hf^{i}$$

O bien, usando t_i, evaluando en $y_i(t_i)$, esto sería inevitable si nos dieran V_0 en vez de h.

P3. Control recuperativo 2019-1.
Un cuerpo es lanzado con rapidez de $25m/s$, desde una altura inicial de $2m$ sobre el suelo, formando un ángulo de 30 con la horizontal. Mientras el cuerpo sube hasta el punto de altura máxima, está permanentemente sometido a la aceleración de gravedad terrestre $g \sim 10m/s^2$, pero una vez que comienza a bajar está sometido a demás a una segunda aceleración constante de frenado de magnitud $2m/s^2$, en dirección horizontal.

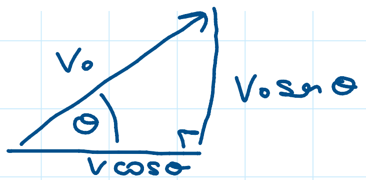
1. Calcule el tiempo que el cuerpo demora en llegar a la altura máxima. ✓
2. Calcule el tiempo que el cuerpo demora en caer. ✓
3. Calcule la distancia total recorrida por el cuerpo en la dirección horizontal, desde el punto de lanzamiento hasta el punto en que choca contra el suelo.
4. Calcule la magnitud de la velocidad del objeto justo antes que impacte contra el suelo.



Conocemos V_0, h_0, θ:

1) Ecuación de itinerario:

$$x(t) = V_{0x} t$$
$$y(t) = h_0 + V_{0y} t - \frac{g t^2}{2}$$



donde $\vec{V_0} = (V_0 \cos\theta, V_0 \sin\theta)$, luego reemplazando:

$$\Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= V_0 \cos\theta\, t && (1) \\ y(t) &= h_0 + V_0 \sin\theta\, t - \frac{g t^2}{2} && (2) \end{aligned}$$

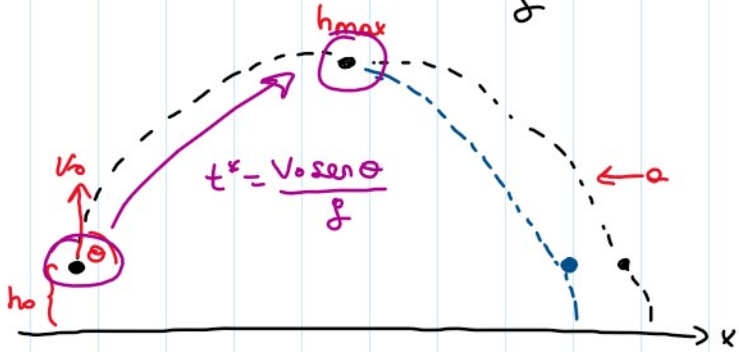
$$\Rightarrow \begin{aligned} V_x(t) &= V_0 \cos\theta && (3) \\ V_y(t) &= V_0 \sin\theta - g t && (4) \end{aligned}$$

Derivar polinomios o de memoria.

Calcular t^* cuando $V_y(t^*)=0$ → $V_y=0$ cuando la altura es máxima.

usando (4) la igualo a cero,

luego $0 = \underline{V_0 \operatorname{sen}\theta} - g t^* \Rightarrow t = \dfrac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$



2) Calcular tiempo de caída, cuando $y(t^*)=0$, luego por (2) igualamos a 0 se tiene que:

$$0 = h_0 + V_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{g t^2}{2} \quad \Big\} \text{ Función cuadrática para } t.$$

Recordemos que
$$t_{1,2} = \frac{-V_0 \operatorname{sen}\theta \pm \sqrt{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + \frac{4 h_0 g}{2}}}{-g}$$

$$\Longrightarrow t_{1,2} = \frac{V_0 \operatorname{sen}\theta \mp \sqrt{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2 h_0 g}}{g}$$

$$\frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g} > 0 \quad y \quad \frac{\sqrt{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2 h_0 g}}{g} > 0$$

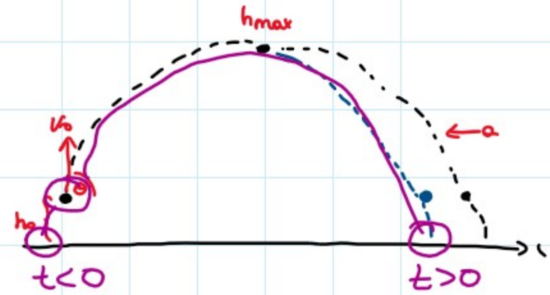
me quedo con el (+).

$$\Longrightarrow t^* = \frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g} + \frac{\sqrt{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2 h_0 g}}{g}$$

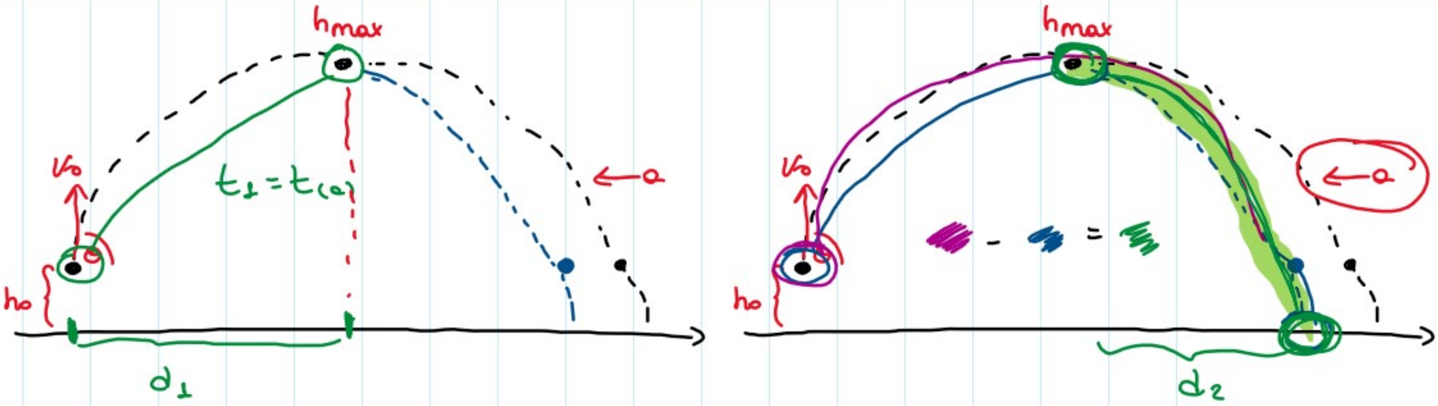
Obs: $\sqrt{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta} = V_0 \operatorname{sen}\theta$

$\Longrightarrow \sqrt{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2 h_0 g} > V_0 \operatorname{sen}\theta$

$\Longrightarrow$ Hay un $\underbrace{t^* > 0}_{(+)}$ y $\underbrace{t^* < 0}_{(-)}$.



c) Usamos intervalos:



$$t_{(a)} = \frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

$$x(t) = V_0 \cos\theta\, t$$

Juntando se tiene que d_1 es:

$$d_1 = V_0 \cos\theta \cdot \frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{V_0^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{g}$$

$$t_{(b)} = \frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g} + \frac{\sqrt{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2h_0 g}}{g}$$ (t en llegar al suelo)

luego $$t_2 = t_{(b)} - t_{(a)} = \frac{\sqrt{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2h_0 g}}{g}$$

Desaceleración

donde $$x(t) = V_0 \cos\theta\, t - \frac{a t^2}{2}$$ En este trayecto la ec de itinerario cambia

$$\Rightarrow d_2 = V_0 \cos\theta \left(\frac{\sqrt{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2h_0 g}}{g} \right) - \frac{a(V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2h_0 g)}{2g^2}$$

finalmente $D = d_1 + d_2$

$$\Rightarrow D = \frac{V_0^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{g} + \left[V_0 \cos\theta \left(\frac{\sqrt{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2h_0 g}}{g} \right) - \frac{a(V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2h_0 g)}{2g^2} \right]$$

d) Calcular V_f en $\hat{x}$ y en $\hat{y}$ por separado.

$V_x(t) = V_0 \cos\theta - a t$ en el tramo de bajada

$$\Rightarrow V_{xf} = V_0 \cos\theta - a \frac{\sqrt{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2h_0 g}}{g}$$

Por otro lado V_y está dado por:

$$V_y(t) = V_0 \operatorname{sen}\theta - g t$$

$$\Rightarrow V_{yf} = V_0 \operatorname{sen}\theta - g\left(\frac{V_0 \operatorname{sen}\theta}{g} + \frac{\sqrt{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2 d_0 g}}{g}\right)$$

y sabemos que $\operatorname{tg}\theta = -\dfrac{V_{yf}}{V_{xf}} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{V_{yf}}{V_{xf}}\right)$

se tiene