

Movimiento rectilíneo: (A lo más uniforme acelerado)

La siguiente ecuación describe el comportamiento general del movimiento rectilíneo (a lo más uniformemente acelerado).

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$\downarrow$ Velocidad inicial $\downarrow$ Aceleración inicial.

los particulares $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + \frac{1}{2} a_0 t^2 \\ x(t) = x_0 + v_0 t \end{array} \right.$

La única condición a respetar es que $\forall t \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene que $a(t) = a_0$ (la ac. es uniforme o constante).

Cálculo: La derivada como pendiente:

La derivada de una función $f(x)$ es una generalización del cálculo de pendiente visto para el caso $f(x) = ax + b$ (ecuación de la recta).

Vemos que una pendiente de una recta es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Con esta idea derivaremos a la derivada $\frac{df}{dx}(x)$, notemos que depende de x , pues la pendiente varía según el punto que se tome, se define como:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x = x_2 - x_1} \quad \Delta f \text{ viene a ser en } \Delta y.$$

Comentario: Cuando el intervalo Δx es muy pequeño, decimos que estamos calculando la pendiente sobre un punto en él.

Pero cómo se resuelve algebraicamente la derivada? Es muy sencillo, nosotros conoceremos algunos

¿Pero cómo se resuelve algebraicamente la derivada?
Es muy sencillo, nosotros conoceremos algunos resultados que son demostrables en los cursos de matemática:

Polinomios:

$$1) f(x) = c, c \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$2) f(x) = mx, m \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = m$$

$$3) f(x) = mx^2, m \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 2mx$$

$$4) f(x) = mx^3, m \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 3mx^2$$

$$f(x) = mx^n, m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow f'(x) = nmx^{n-1}$$

Suma de funciones

Sea $f(x) = g(x) + h(x)$, luego su derivada es

$$f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Ejemplo:

Sea $f(x) = ax + bx^2$, luego $g(x) = ax$; $h(x) = bx^2$

$$\Rightarrow f'(x) = a + 2bx \text{ es la derivada de } f(x)$$

Velocidad y aceleración

Ahora vemos cómo se aplica la derivada en la función $x(t)$.

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$\Rightarrow x'(t) = 0 + v_0 + \frac{2}{2} a_0 t$$

$$\Rightarrow x'(t) = v_0 + a_0 t \rightarrow \underline{\text{Velocidad instantánea}}$$

¿Y si derivamos esto?

$$v(t) = v_0 + a_0 t$$

$$\Rightarrow v'(t) = 0 + a_0$$

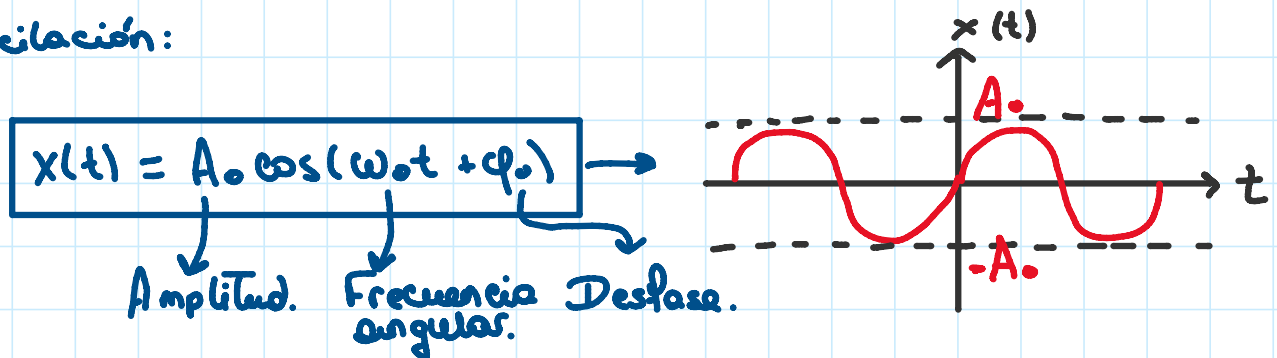
$\Rightarrow v'(t) = 0_{\text{no}} \rightarrow \underline{\text{Aceleración instantánea}}$
(recordar que $a(t) = 0_{\text{no}} = 0_{\text{no}}$)

Resumen:

A partir de la ecuación de itinerario, mediante las derivadas podemos obtener:

- 1) Velocidad instantánea.
- 2) Aceleración instantánea.

Hay ecuaciones que describen movimientos no rectilíneos (lo cual es evidente que ocurre en la realidad), en particular es de importancia describir un movimiento oscilación:



Cálculo para funciones trigonométricas:

Veamos las derivadas para algunas funciones que vamos a usar para describir movimientos oscilatorios:

$$1) f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$2) f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$$

$$3) f(x) = -\sin(x) \Rightarrow f'(x) = -\cos(x)$$

$$4) f(x) = -\cos(x) \Rightarrow f'(x) = \sin(x)$$

$$5) f(x) = \sin(ax) \Rightarrow f'(x) = a \cdot \cos(ax)$$

$$6) f(x) = \cos(ax) \Rightarrow f'(x) = -a \cdot \sin(ax)$$

$$7) f(x) = -\sin(ax) \Rightarrow f'(x) = -a \cdot \cos(ax)$$

$$8) f(x) = -\cos(ax) \Rightarrow f'(x) = a \cdot \sin(ax)$$

← Regla de la cadena
¿Por qué?

Velocidad y aceleración

Utilizando lo anterior, podemos calcular las derivadas para la función $x(t)$:

$$x(t) = \lambda_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\Rightarrow x'(t) = -\lambda_0 \underline{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = v(t)$$

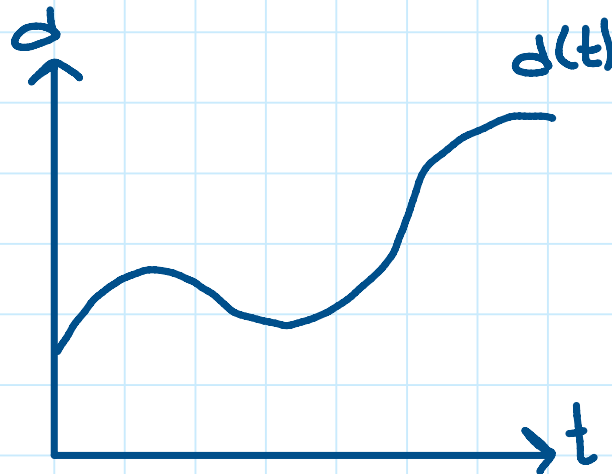
$$\Rightarrow x''(t) = -\lambda_0 \underline{\omega_0^2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = a(t)$$

Velocidad media

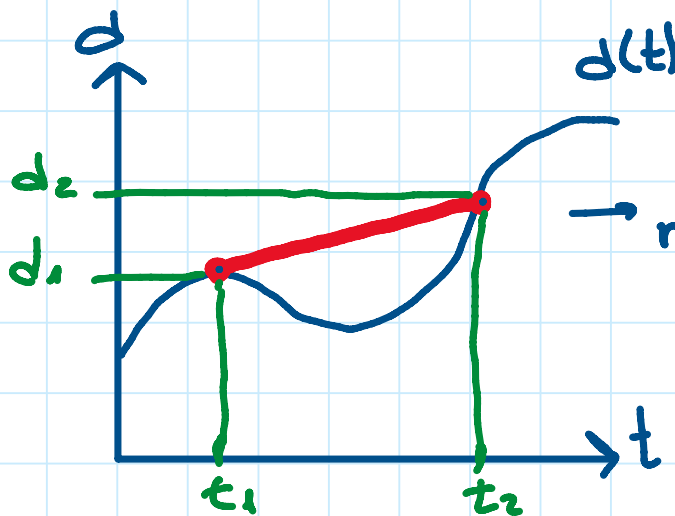
miércoles, 8 de abril de 2020 3:21

¿Qué es una velocidad?

La velocidad es la razón de cambio de la distancia respecto al tiempo.



La razón de cambio es la pendiente.



$$m = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$$

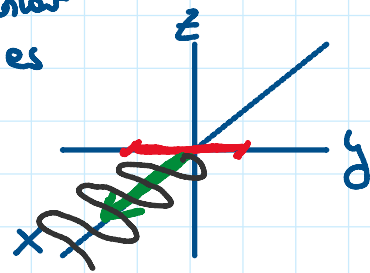
Velocidad media entre 1 y 2.

La velocidad media coincide con la velocidad instantánea en el caso en que $d(t)$ sea una ecuación lineal entre 1 y 2.

Esto quiere decir que V es constante en el intervalo (t_1, t_2) .

El movimiento en 2 dimensiones se puede representar mediante un vector $\vec{r}(t)$, donde cada componente es un movimiento independiente:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

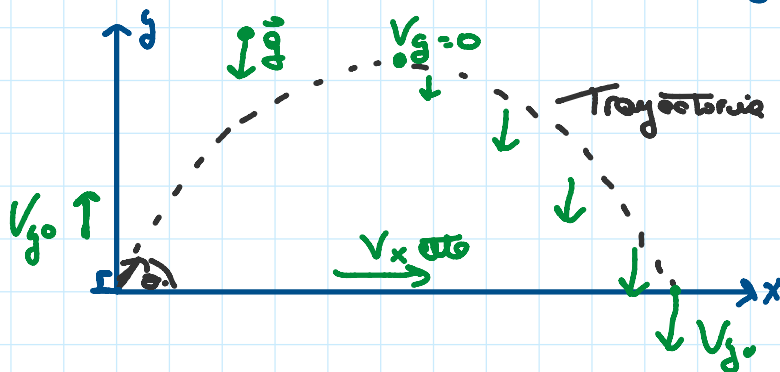


Dos casos a estudiar que son muy importantes:

1) Movimiento parabólico o lanzamiento parabólico:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x}t \\ y_0 + v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{MRU (no acelerado)} \\ \rightarrow \text{MRUA (a} = -\vec{g} \text{)} \end{matrix}$$

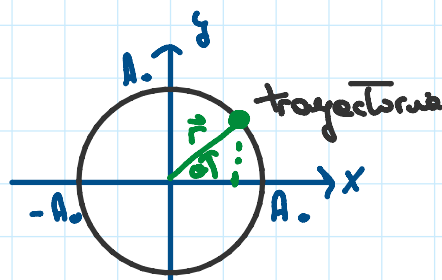
donde en el eje horizontal no hay aceleración y en el eje vertical acelera por la gravedad.



2) Movimiento circular uniforme:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) \\ A_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0) \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \cos \\ \rightarrow \sin \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \text{¿Por qué?} \end{matrix} \right.$$

donde en cada eje hay una oscilación independiente de la otra.



$$|r(t)| \cdot \cos(\theta) = r(t)_x$$

$$|r(t)| \cdot \sin(\theta) = r(t)_y$$

$$\text{donde } \theta(t) = \omega_0 t + \phi_0$$



donde $\theta(t) = \omega_0 t + \phi_0$

Comentario: Podemos notar que podemos particularizar los casos vistos a movimientos en 1D.

(1.1) Cuando $y(t) = 0 \forall t$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x}t \\ 0 \end{pmatrix}$$

que describe un mov. rectilíneo uniforme en el eje x .

(1.2) Cuando $x(t) = 0 \forall t$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \end{pmatrix}$$

que describe un mov. rectilíneo uniformemente acelerado en el eje y . (Usualmente llamado lanzamiento vertical).

(2) Cuando $x(t) = 0$ o $y(t) = 0$, se recupera el movimiento oscilatorio sobre el eje no nulo.

Movimiento parabólico

domingo, 12 de abril de 2020

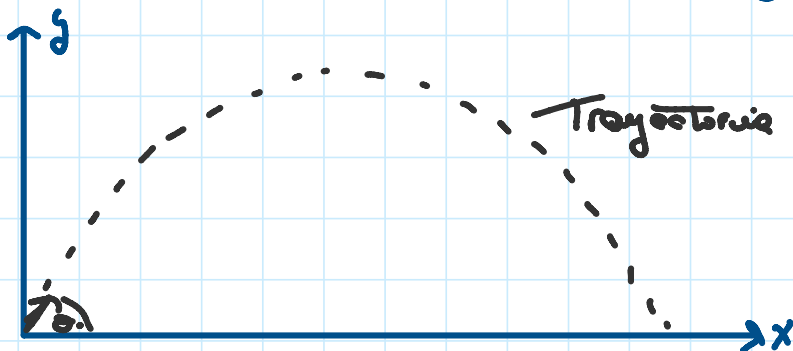
2:30

Movimiento parabólico
(lanzamiento parabólico):

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x}t \\ y_0 + v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

MRU → Vector de posición. → MRUA

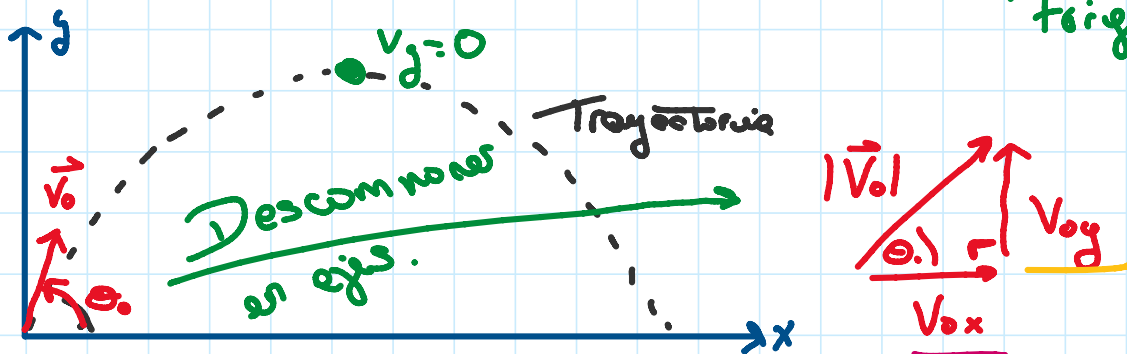
donde en el eje horizontal no hay aceleración y en el eje vertical acelera por la gravedad.



Digamos que hay una velocidad inicial con una dirección respecto al eje x y una magnitud.

$$\vec{V}_0 = (V_{0x}, V_{0y}) = (|\vec{V}_0| \cdot \cos\theta; |\vec{V}_0| \cdot \sin\theta)$$

Usando trigonometría.



Luego, vemos el vector de velocidad, y sus componentes:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \underline{v_{0x}t} \\ y_0 + v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

Comentarios:

1. lineal y 2.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x}t \\ y_0 + v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} - gt \end{pmatrix}$$

Y luego el de aceleración:

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

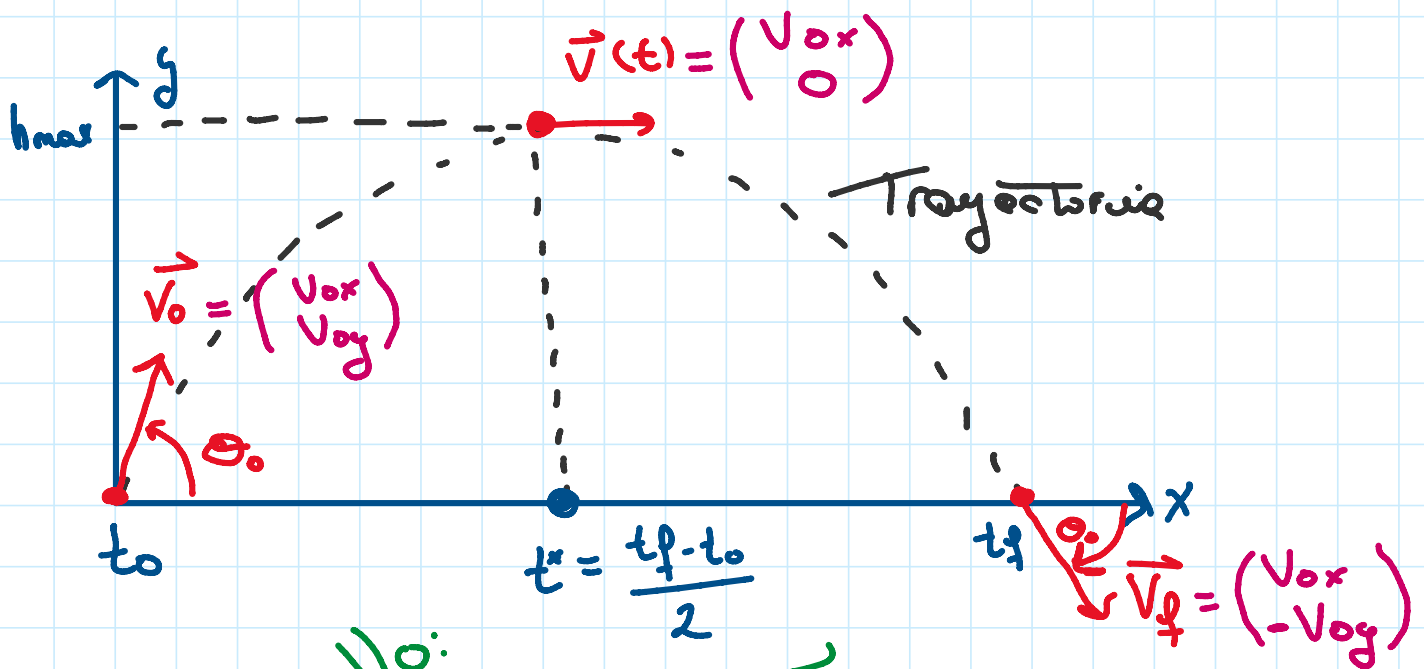
Aplícase $\frac{d}{dt}$ en cada coordenada

La velocidad en x es cte.

Derivando nuevamente.

Sólo hay aceleración en el eje y.

Puntos importantes del movimiento



Desarrollo:

Tiempo cuando se alcanza la altura máxima.

$$(1) y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2$$

$$(2) v_y(t) = v_{0y} - gt \longrightarrow \text{Considerando } v_y(t) = 0$$

$$(1) \Rightarrow 0 = v_{0y} - gt$$

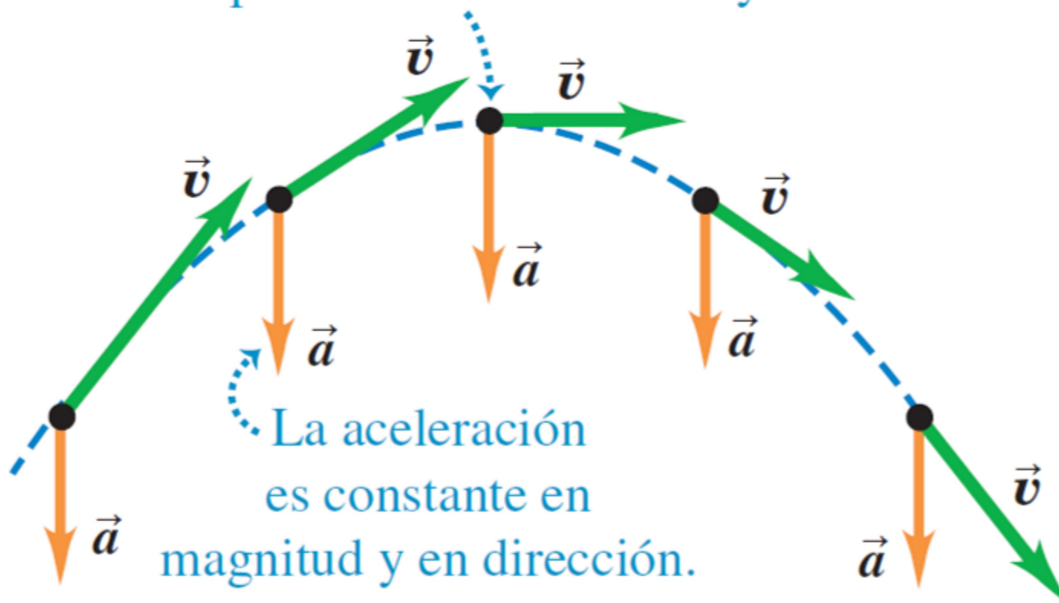
$$\Leftrightarrow \frac{v_{0y}}{g} = t^*$$

Luego, la altura máxima en (1) es:

$$y(t^*) = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{v_{0y}^2}{2g} = \underline{\underline{y_{max}}}$$

Velocidad y aceleración graficada en la trayectoria

La velocidad y la aceleración son perpendiculares sólo en el punto más alto de la trayectoria.



Enunciado auxiliar 4

domingo, 3 de mayo de 2020 20:58



Auxiliar04

AUXILIAR #4 - MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES FI1000 - INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA CLÁSICA.

PROFESOR: CLAUDIO ROMERO - AUXILIARES: MANUEL TORRES - FELIPE CUBILLOS - VALENTINA SEGOVIA

Un movimiento muy usual a estudiar en dos dimensiones corresponde al lanzamiento parabólico, debido a las situaciones que puede modelar, a continuación se presentan algunos problemas sobre este tipo de movimiento:

Problema #1

Una pelota es pateada con velocidad inicial y ángulo desde el inicio de una rampa infinita de ángulo característico:

- (1) Calcule el alcance de la pelota sobre la rampa.
- (2) Calcule el ángulo en función de θ para el cual el alcance es máximo. Analice los casos $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \pi$. Hint: Use identidades trigonométricas que impliquen ángulos dobles.

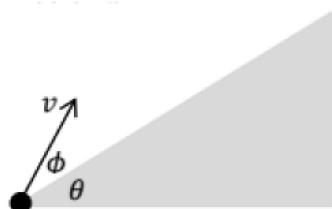


Figura problema 1.

Problema #2

Desde una distancia d del borde recto de un tobogán se dispara una bengala. Si el tobogán tiene una altura h y un largo b , determinar ambas componentes de la velocidad inicial del proyectil para que éste aterrice sobre el vértice superior del tobogán de manera que su velocidad sea paralela al plano inclinado.

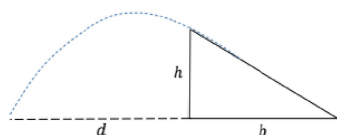


Figura problema 2.

Problema #3

El ibis es un ave egipcia con la misión de entregar una ofrenda al faraón Tutankhamon que espera aburrido en la cámara mortuoria de su pirámide. El ibis, que vuela con velocidad u , debe dejar caer su ofrenda, desde lo alto de su vuelo, de modo tal que no sólo se encuentre con la entrada del canal secreto que conduce a la cámara mortuoria (cuyas dimensiones son suficientes para albergar el preciado encargo) sino que además tenga la misma dirección del canal en dicho punto (ver figura). Calcule la

altura H y la distancia D (indicadas en la figura) desde las cuales el ibis debe soltar la ofrenda, para que el faraón reciba su regalo. Considere que la pirámide, proyectada en el plano de la trayectoria de la ofrenda es un triángulo equilátero de lado a , y que el canal secreto que lleva hacia la cámara de Tutankhamon es perpendicular a la cara de la pirámide y se encuentra en su punto medio.

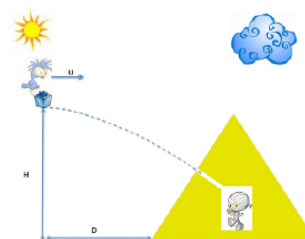
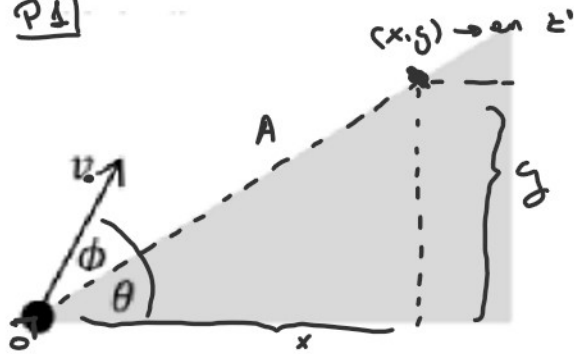


Figura problema 3.

Problema #4

Un halcón vuela horizontalmente a 10m/s en línea recta a 200m de altura. En el pico lleva un ratón que se le cae. Después de 2 segundos el halcón reacciona y cambia su trayectoria para recuperar su presa. Para ello cambia su velocidad tanto en magnitud como en dirección siguiendo una trayectoria recta, descendente, que forma un ángulo con la vertical y recupera el ratón a 3 metros sobre el suelo.

- (1) Encuentre la velocidad (magnitud y dirección) del halcón.
- (2) ¿Por cuánto tiempo estuvo el ratón en caída libre?

P1

Las ecuaciones de mov son:

$$x(t) = V_{0x}t \quad \text{donde } V_{0x} = V_0 \cos(\phi + \theta)$$

$$\Rightarrow x(t) = V_0 \cos(\theta + \phi) t \quad \text{eq 1}$$

$$y(t) = V_{0y}t - \frac{g t^2}{2} \quad \text{donde } V_{0y} = V_0 \sin(\phi + \theta)$$

$$\Rightarrow y(t) = V_0 \sin(\phi + \theta) t - \frac{g t^2}{2} \quad \text{eq 2}$$

Por otro lado, Tenemos: $t_{\phi\theta} = \frac{y}{x} \rightarrow y = t_{\phi\theta} \cdot x \quad \text{eq 3}$

$\cos \theta = \frac{x}{A}$ o bien en $\theta = \frac{y}{A}$, donde (x', y') en t' (cuando cae sobre la rampa).

De la eq 1 $\rightarrow t' = \frac{x}{V_0 \cos(\theta + \phi)}$, reemplazo en eq 2.

$$\Rightarrow y = \frac{V_0 \sin(\theta + \phi) x}{V_0 \cos(\theta + \phi)} - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2(\theta + \phi)} \quad \text{reemplazo en eq 3}$$

$$\Rightarrow x t_{\phi\theta} = x t_{\phi}(\theta + \phi) - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2(\theta + \phi)} \quad / \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow t_{\phi\theta} - t_{\phi}(\theta + \phi) = - \frac{g x}{2 V_0^2 \cos^2(\theta + \phi)}$$

$$\Rightarrow \frac{2 V_0^2 \cos^2(\theta + \phi)}{g} (t_{\phi}(\theta + \phi) - t_{\phi}(\theta)) = x = A \cos \theta \quad \text{Triángulo}$$

$$\Rightarrow \frac{2 V_0^2 \cos^2(\theta + \phi)}{g \cos \theta} (t_{\phi}(\theta + \phi) - t_{\phi} \theta) = A //$$

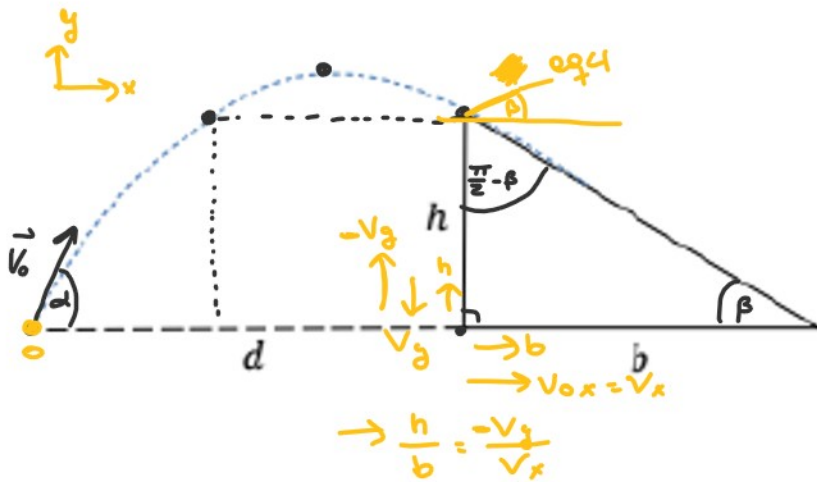
Parte b: $\text{Rango } A(\theta) \rightarrow \frac{dA}{d\theta}(\theta)$ la pendiente de $A(\theta)$

$\rightarrow$ Luego $\frac{dA}{d\theta} = 0$ para tener los

candidatos a máximo/mínimo.

— 0 —

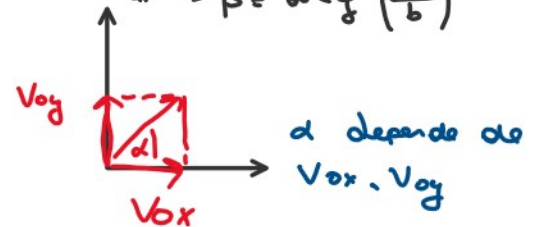
P21



$$\vec{V}_0 = (V_{0x}, V_{0y})$$

$$\tan \alpha = \frac{V_{0y}}{V_{0x}} \rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{V_{0y}}{V_{0x}}\right)$$

$$\# \rightarrow \beta = \arctan\left(\frac{h}{b}\right)$$



$$x(t) = V_{0x}t \rightarrow d = V_{0x}t' \rightarrow t' = \frac{d}{V_{0x}} \quad \text{eq 1}$$

$$y(t) = V_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \rightarrow h = V_{0y}t' - \frac{gt'^2}{2} \quad \text{eq 2}$$

$$V_y(t) = V_{0y} - gt \quad \text{eq 3}$$

Luego por trigonometría, se tiene que $\frac{h}{b} = \frac{V_y}{V_x} (-1)$ ¿Por qué? eq 4
 (-1) , puesto que V_y en t' apunta hacia abajo y queremos solo cosas positivas. $\rightarrow \tan \beta$, me da la inclinación.

Notar que $V_{0x} = V_x(t) \forall t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow -\frac{h}{b} = \frac{V_{0y} - gt'}{V_{0x}} = \tan \beta \quad \text{eq 5}$

(Acabo de imponer que la velocidad en el instante t' tome la inclinación de la rampa).

$$\text{De eq 5} \rightarrow -\frac{V_{0x}h}{b} = V_{0y} - gt' \Rightarrow V_{0y} = gt' - \frac{V_{0x}h}{b}$$

$$\Rightarrow V_{0y} = \frac{gd}{V_{0x}} - \frac{V_{0x}h}{b} \quad \text{eq 6}$$

$$\text{De eq 1 y eq 2} \rightarrow h = \frac{V_{0y}d}{V_{0x}} - \frac{gd^2}{2V_{0x}^2} \Rightarrow \frac{hV_{0x}}{d} = V_{0y} - \frac{gd}{2V_{0x}}$$

$$\Rightarrow V_{0y} = \frac{V_{0x}h}{d} + \frac{gd}{2V_{0x}} \quad \text{eq 7}$$

$$\text{Luego eq 6 = eq 7 (V}_{0y}) \rightarrow \frac{gd}{V_{0x}} - \frac{V_{0x}h}{b} = \frac{V_{0x}h}{d} + \frac{gd}{2V_{0x}}$$

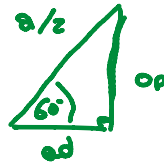
$$\Rightarrow \frac{gd}{V_{0x}} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = V_{0x} \left(\frac{h}{d} + \frac{h}{b}\right)$$

$$\Rightarrow + \sqrt{\frac{g d}{2(n/s + n/b)}} = v_{ox}$$

Se concluye ☺
—————○—————

A diagram illustrating projectile motion. A person is shown at a height H on the left, launching an object with an initial velocity u . The object follows a parabolic path (dotted line) over a yellow triangular hill. The hill has a base of D and a peak height of a . The object lands on the slope of the hill at a point where the vertical distance from the base is $a/2$. The horizontal distance from the launch point to the landing point is $D + ad$. The vertical distance from the launch point to the landing point is H . The diagram also shows a sun, a cloud, and a small inset of a person.

$$t^* : \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{D} + \text{odd}, \text{op})$$



P4

A spacetime diagram illustrating a worldline. The vertical axis represents time t and the horizontal axis represents space x . The worldline is a curve starting at a point labeled $t=0$, passing through a point labeled $t=2$, and ending at a point labeled $t=2$. A vertical dashed line extends from the final point $t=2$ to a point labeled t^* . A bracket indicates the distance between the final point $t=2$ and the point t^* is $3m$. An arrow points from the top right towards the point $t=2$.

Pendientes auxiliar 4

miércoles, 13 de mayo de 2020

2:23

Movimiento circular uniforme

domingo, 12 de abril de 2020

3:08

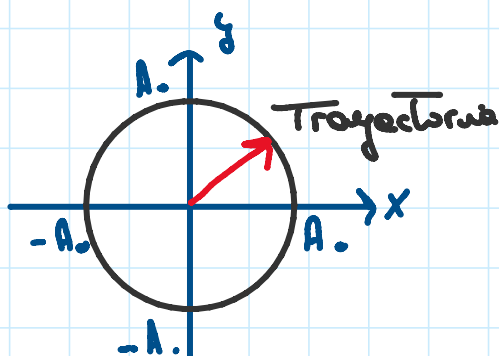
Movimiento circular uniforme:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{x} \\ \hat{y} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cos(\cdot) \\ \sin(\cdot) \end{array}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) \\ A_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0) \end{pmatrix}$$

¿iguales amplitudes?

donde en cada eje hay una oscilación independiente de la otra.



Observación:

Si se tuviesen amplitudes diferentes en x, y , digamos A_0 y B_0 , se describiría una elipse. } A_0, B_0 y ω_0 en ambos

Veamos el vector de velocidad:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) \\ A_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0) \end{pmatrix}$$

Velocidad tangencial.

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0) \\ A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) \end{pmatrix}$$

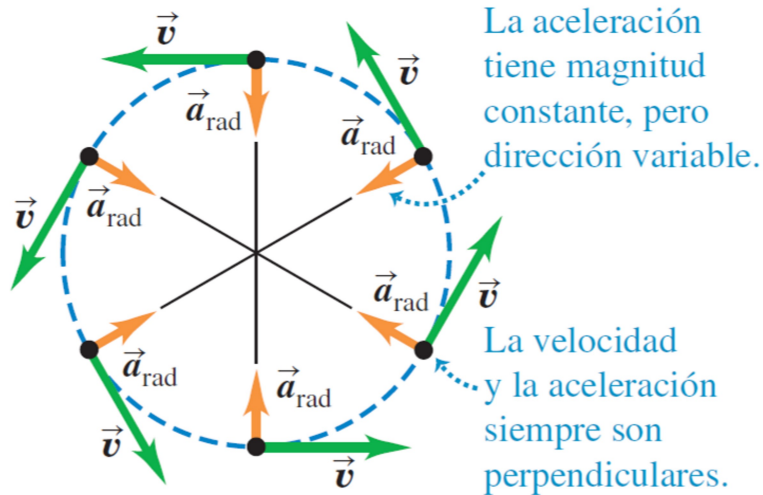
Luego, la aceleración

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi_0) \\ -A_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \phi_0) \end{pmatrix}$$

$$= -\omega_0^2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) \\ A_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0) \end{pmatrix}}_{\text{notar que:}}$$

$$= -\omega_0^2 \cdot \vec{r}(t)$$

Aceleración
centrípeta.



Enunciado tutoría

martes, 19 de mayo de 2020 20:43



Tutoria1-
Cinematic...

FI1000 - Introducción a la física clásica

Tutoría - Cinemática 2D

Autor: Manuel Torres

Resumen

En cinemática, una ecuación vectorial de posición $\vec{r}(t)$ (en función del tiempo t), corresponde a un vector el cual en cada componente posee una ecuación de posición en función del tiempo. El movimiento de $\vec{r}(t)$ es la superposición de n movimientos, donde n es la cantidad de dimensiones en las que existe movimiento, en particular nos interesará estudiar el movimiento bidimensional.

Funciones de posición versus tiempo

A continuación se presentan dos tipos de movimientos en función del tiempo:

1. **Ecuación polinomial de a lo más segundo grado:** Describe trayectorias lineales, dichas trayectorias son recorridas con una velocidad $v(t)$, donde la presencia o ausencia de aceleración sólo influye en la velocidad con la que es recorrida la línea recta.
2. **Ecuación sinusoidal:** Describe trayectorias oscilatorias o armónicas, dichas trayectorias describen la base del movimiento más importante estudiado en la física, el movimiento armónico simple que es el encontrado es péndulos, resortes, entre otros fenómenos.

$$\begin{aligned}x(t) &= \alpha t^2 + \beta t + \gamma \\ &= \frac{a_0}{2} t^2 + v_0 t + x_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(t) &= a \cos(bt + c) + d \\ &= x_0 \cos(w_0 t + \phi_0)\end{aligned}$$

A continuación estudiaremos composiciones de estos movimientos que nos permiten generar vectores $\vec{r}(t)$ interesantes:

- **Lanzamiento parabólico:** Basta con considerar $x(t)$ e $y(t)$ tales que sean polinomios de orden 1 y 2 respectivamente, quedando.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x}t \\ y_0 + v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, la composición de dos movimientos oscilatorios que presenten cierto acoplamiento conveniente permite producir un movimiento circular uniforme:

- **Movimiento circular uniforme:** Basta con considerar $x(t)$ e $y(t)$ tales que sean polinomios de orden 1 y 2 respectivamente, quedando.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \cos(w_0 t + \phi_0) \\ r_0 \sin(w_0 t + \phi_0) \end{pmatrix}$$

Lanzamiento parabólico

P1.- Desde una distancia d del borde recto de un tobogán se dispara una bengala. Si el tobogán tiene una altura h y un largo b , determinar ambas componentes de la velocidad inicial del proyectil para que éste aterrice sobre el vértice superior del tobogán de manera que su velocidad sea paralela al plano inclinado.

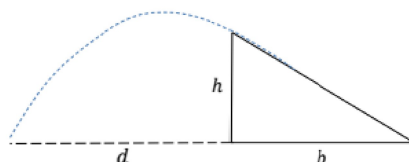


Figura 1: Figura problema 1.

P2.- El ibis es un ave egipcia con la misión de entregar una ofrenda al faraón Tutankhamon que espera aburrido en la cámara mortuoria de su pirámide. El ibis, que vuela con velocidad u , debe dejar caer su ofrenda, desde lo alto de su vuelo, de modo tal que no sólo se encuentre con la entrada del canal secreto que conduce a la cámara mortuoria (cuyas dimensiones son suficientes para albergar el preciado encargo) sino que además tenga la misma dirección del canal en dicho punto (ver figura). Calcule la altura H y la distancia D (indicadas en la figura) desde las cuales el ibis debe soltar la ofrenda, para que el faraón reciba su regalo. Considere que la pirámide, proyectada en el plano de la trayectoria de la ofrenda es un triángulo equilátero de lado a , y que el canal secreto que lleva hacia la cámara de Tutankhamon es perpendicular a la cara de la pirámide y se encuentra en su punto medio.

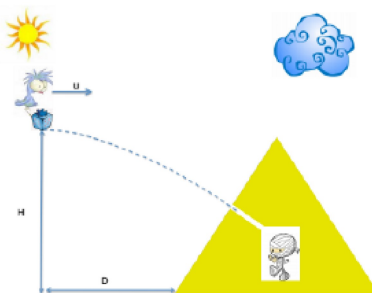


Figura 2: Problema 2.

Movimiento circular uniforme

P3.- Considere un disco de radio R en el plano $x-y$. Sea θ el ángulo de un punto ubicado en el borde del disco respecto al eje $\hat{x}$. Suponga que el disco gira con una aceleración angular constante $\alpha = 0 = 0$ (es decir, $\ddot{\theta} = 0$).

1. Encuentre la velocidad y aceleración de P en función del tiempo. Suponga que en el instante $t = 0$, el punto P se encontraba en reposo sobre el eje $\hat{x}$. *Hint: Utilice la dirección $\hat{p} = \cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}$ para describir la posición.*
2. Grafique la posición relativa al eje $\hat{x}$ para $t \leq 0$.
3. Grafique la posición relativa al eje $\hat{y}$ para $t \leq 0$.

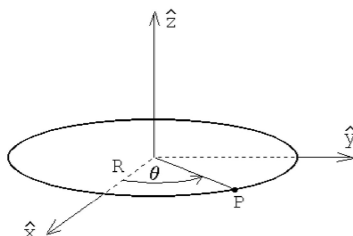


Figura 3: Problema 3.

P4.- Florencia, destacada ciclista de la universidad, circula en su bicicleta caracterizada por ruedas de radio R . La cadena está colocada a una distancia P del centro del piñón, asociado a la rueda trasera y a una distancia D del eje del motor, en el cual están unidos las bielas y los pedales. Si la bicicleta avanza sin resbalar, es decir, cuando la rueda da una vuelta, el centro de esta avanzó una distancia $2\pi R$, ¿Con qué frecuencia debe pedalear Florencia para avanzar con su bicicleta a una velocidad v ?

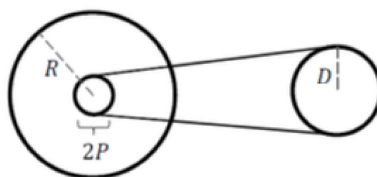


Figura 4: Problema 4.

Cinematología:

Funciones de posición v/s tiempo: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
 donde x, y, z son funciones de posición.

Veamos dos casos de $\vec{r}(t)$:

1) Polinomio de orden (o lo más) 2:

$$\vec{r}(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$$

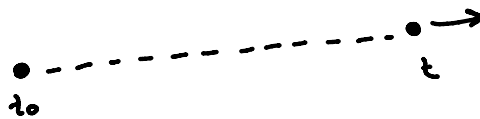
$$= \frac{a_0}{2} t^2 + V_0 t + X_0, \text{ donde } a_0, V_0, X_0 \text{ son los estados en } t=0.$$

$$\Rightarrow \vec{r}'(t) = 2\alpha t + \beta \leftarrow \text{Velocidad}(t)$$

$$= a_0 t + V_0$$

$$\Rightarrow \vec{r}''(t) = a_0 \rightarrow \text{aceleración en el tiempo.}$$

Movimiento rectilíneo

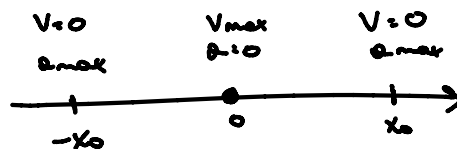


2) $\vec{r}(t) = a \cos(bt + c)$, $\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin(\theta)$
sen

$$\rightarrow x(t) = X_0 \cos(\omega \cdot t + \phi_0)$$

$\uparrow$ Amplitud $\uparrow$ Frecuencia / vel. angular $\uparrow$ Desfase.

} Mov. oscilatorio.



Derivando

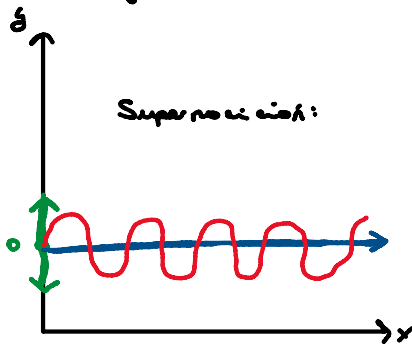
$$\begin{cases} \vec{r}'(t) = -a b \sin(bt + c) \\ \vec{r}''(t) = -a b^2 \cos(bt + c) \end{cases}$$

Movimiento 2D:

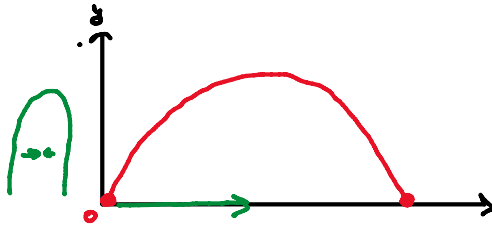
Algunos ejemplos:

1) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Polinomio orden 2} \\ \text{Trigonométrico} \end{pmatrix}$
 $\uparrow$

$\setminus g(t) / \setminus \text{Trigonométricas} /$



2) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \text{Pol. orden 1} \\ \text{Pol. orden 2} \end{pmatrix}$ (Lanzamiento parabólico)



3) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \text{Oscilación} \\ \text{Oscilación} \end{pmatrix}$ (Mov. circ.).

$\begin{cases} x(t) = r_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) \\ y(t) = r_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0) \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{al superponer esto} \\ \text{se obtiene un mov.} \\ \text{circular uniforme} \end{array} \right\}$

P1.- Desde una distancia d del borde recto de un tobogán se dispara una bengala. Si el tobogán tiene una altura h y un largo b , determinar ambas componentes de la velocidad inicial del proyectil para que éste aterrice sobre el vértice superior del tobogán de manera que su velocidad sea paralela al plano inclinado.

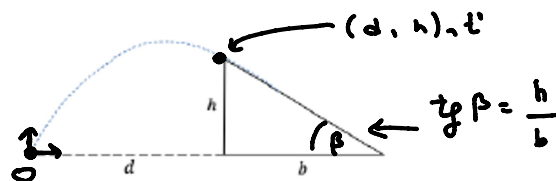
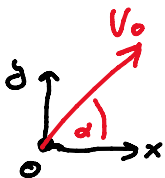


Figura 1: Figura problema 1.

Ilustración:



$$\vec{V}_0 = (V_{0x}, V_{0y}) = |\vec{V}_0| (\cos \alpha \hat{u} + \sin \alpha \hat{j}), \quad \alpha = \arctan \left(\frac{V_{0y}}{V_{0x}} \right)$$

Basta con hallar (V_{0x}, V_{0y}) o bien $(|\vec{V}_0|, \alpha)$.

1ra parte:

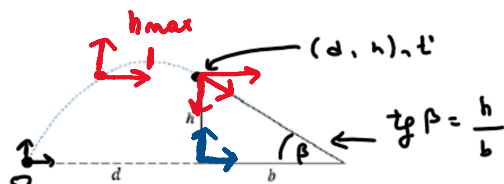
Para comenzar:

$$\begin{aligned} 1) \quad x(t) &= V_{0x} t & \Rightarrow \quad d &= V_{0x} t' \Rightarrow t' = \frac{d}{V_{0x}} \quad (5) \\ 2) \quad y(t) &= V_{0y} t - \frac{g t^2}{2} & \Rightarrow \quad h &= V_{0y} t' - \frac{g t'^2}{2} \quad (6) \end{aligned}$$

$$3) \quad V_x(t) = V_{0x} \quad \forall t$$

$$4) \quad V_y(t) = V_{0y} - gt \quad \xRightarrow{t'} \quad V_y = V_{0y} - gt' \quad (7)$$

Por otro lado, por teo. de Thales:



$$\Rightarrow \quad \frac{h}{b} = \tan \beta = \frac{-V_y}{V_x} \quad (\text{en la zona de descenso})$$

$$\xRightarrow{t'} \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{b} = -\frac{V_y}{V_x} \quad (8)$$

2da parte:

Reemplazando (5) en (6) y (7), como $t' = \frac{d}{V_{0x}}$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{V_{0y}}{V_{0x}} d - \frac{gd^2}{2V_{0x}^2} \quad \wedge \quad V_y = V_{0y} - \frac{gd}{V_{0x}} \quad (9) \wedge (10)$$

Reemplazando (10) y (3) en (8):

$$\Rightarrow \quad \frac{h}{b} = -\frac{V_y}{V_x} = -\frac{\left(V_{0y} - \frac{gd}{V_{0x}}\right)}{V_{0x}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h V_{0x}}{b} = -V_{0y} + \frac{gd}{V_{0x}}$$

$$\Rightarrow \quad V_{0y} = -\frac{h V_{0x}}{b} + \frac{gd}{V_{0x}} \quad (11)$$

Reemplazando (11) en (9):

$$\Rightarrow \quad h = \left(-\frac{h V_{0x}}{b} + \frac{gd}{V_{0x}}\right) \frac{d}{V_{0x}} - \frac{gd^2}{2V_{0x}^2}$$

$$= -\frac{dh}{b} + \frac{gd^2}{V_{0x}^2} - \frac{gd^2}{2V_{0x}^2} = -\frac{dh}{b} + \frac{gd^2}{2V_{0x}^2}$$

$$\Rightarrow \quad h + \frac{dh}{b} = \left(\frac{gd^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{V_{0x}^2}$$

$$\Rightarrow \quad V_{0x}^2 = \frac{gd^2}{2\left(h + \frac{dh}{b}\right)} \Rightarrow \quad V_{0x} = \pm \left[\frac{gd^2}{2\left(h + \frac{dh}{b}\right)} \right]^{1/2} \quad (12)$$

nos quedamos con el (+).

y finalmente, evaluemos (12) en (11) y obtenemos V_{0y} .

$$\cdot r = d^2 \quad 1/2 \quad \cdot r = d^2 \quad 1/2$$

y finalmente, evaluemos (12) en (11) y obtenemos V_{0y} .

$$V_{0y} = -\frac{hV_{0x}}{b} + \frac{gd}{V_{0x}} \Rightarrow V_{0y} = -\frac{h}{b} \left[\frac{gd^2}{2(h + \frac{dh}{b})} \right]^{1/2} + gd \left[\frac{gd^2}{2(h + \frac{dh}{b})} \right]^{-1/2}$$

Basta con ir enumerando
las ecuaciones
útiles

P3.- Considere un disco de radio R en el plano $x-y$. Sea θ el ángulo de un punto ubicado en el borde del disco respecto al eje $\hat{x}$. Suponga que el disco gira con una aceleración angular constante $\alpha = 0 = \dot{\omega}$ (es decir, $\dot{\theta} = 0$).

1. Encuentre la velocidad y aceleración de P en función del tiempo. Suponga que en el instante $t = 0$, el punto P se encontraba en reposo sobre el eje $\hat{x}$.
2. Grafique la posición relativa al eje $\hat{x}$ para $t \leq 0$.
3. Grafique la posición relativa al eje $\hat{y}$ para $t \leq 0$.

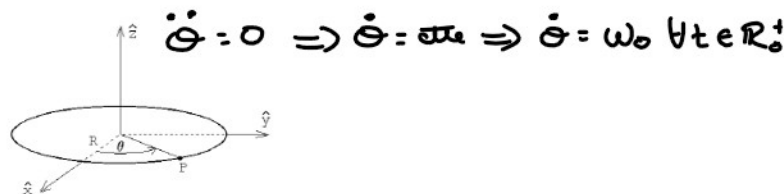
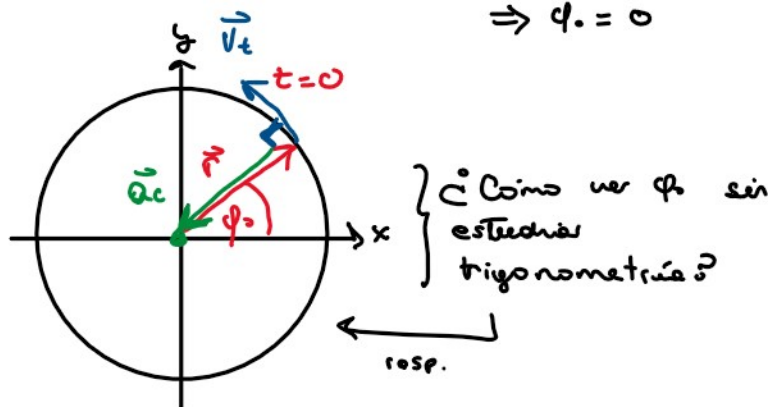


Figura 3: Problema 3.

Parte 1:

1) $x(t) = R \cos(\omega_0 t + \phi_0)$

2) $y(t) = R \sin(\omega_0 t + \phi_0) \xrightarrow{t=0} y(t) = 0 = R \sin(\omega_0 \cdot 0 + \phi_0)$
 $\Rightarrow 0 = \sin(\phi_0)$
 $\Rightarrow \phi_0 = \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}$ (difícil)
 $\Rightarrow \phi_0 = 0$



$\Rightarrow$ (1) $x(t) = R \cos(\omega_0 t)$
 (2) $y(t) = R \sin(\omega_0 t)$

$\frac{d}{dt} \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = -R\omega_0 \sin(\omega_0 t) \\ v_y(t) = R\omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{cases}$

$\frac{d}{dt} \Rightarrow \begin{cases} a_x(t) = -R\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2 \cdot x(t) \\ a_y(t) = -R\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) = -\omega_0^2 \cdot y(t) \end{cases}$

Anexas:

0

Anejos:

- Como vector: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}(t) &= (-\omega_0^2 x(t), -\omega_0^2 y(t)) \\ &= -\omega_0^2 (x(t), y(t)) \\ &= -\omega_0^2 \vec{r}(t)\end{aligned}$$

- Derivar funciones trig.

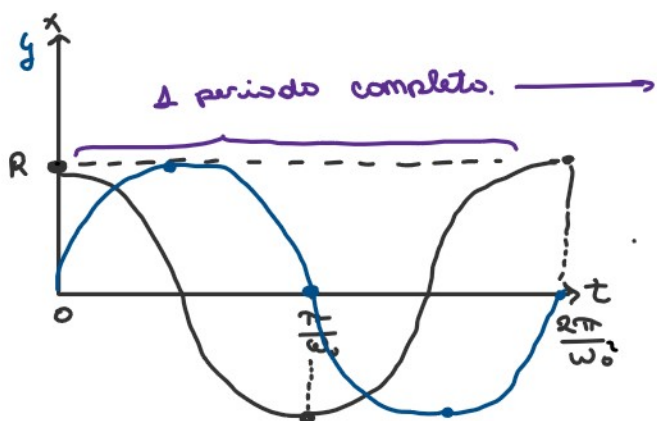
$$1) \quad \sin(x) \xrightarrow{d/dx} \cos(x) \xrightarrow{d/dx} -\sin(x) \xrightarrow{d/dx} -\cos(x) \xrightarrow{d/dx} \sin(x)$$

$$2) \quad \frac{d}{dx} \cos(Kx) = -\sin(Kx) \cdot \frac{d}{dx}(Kx) = -\sin(Kx) \cdot K$$

(Regla de la cadena)

Parte 2 y 3:

Graticar y ver que son lo mismo salvo una traslación



$$\frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \omega_0^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0^2}$$

El desfase es $\frac{1}{4}T$.

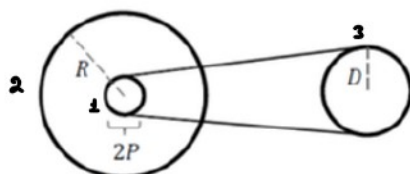
$$\Rightarrow x(t) = y(t \pm \text{desfase}).$$

P4.- Florencia, destacada ciclista de la universidad, circula en su bicicleta caracterizada por ruedas de radio R . La cadena está colocada a una distancia P del centro del piñón, asociado a la rueda trasera y a una distancia D del eje del motor, en el cual están unidos las bielas y los pedales. Si la bicicleta avanza sin resbalar, es decir, cuando la rueda da una vuelta, el centro de esta avanzó una distancia $2\pi R$, ¿Con qué frecuencia debe pedalear Florencia para avanzar con su bicicleta a una velocidad v ?

Condiciones:

1 y 2 tienen ω_0

1 y 3 tienen iguales v_t



Usar que:

$$\Rightarrow \omega \cdot R = v_t \quad (\text{deducir})$$