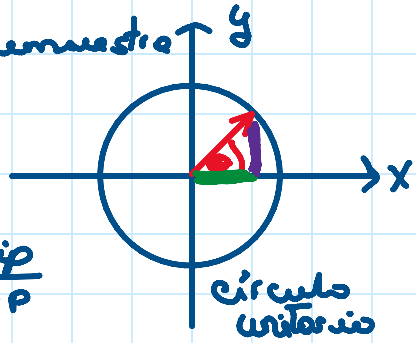
Trigonometría

martes, 7 de abril de 2020 23:58

Dudas y sugerencias a:
manuel.torres@ug.uchile.

Repaso:

Se definen las siguientes funciones (a priori relaciones, luego se demuestra que son funciones) en un ambiente geométrico:



1) $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{op}{hip}$ 4) $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{hip}{op}$

2) $\cos\theta = \dfrac{ad}{hip}$ 5) $\sec\theta = \dfrac{hip}{ad}$

3) $\tan\theta = \dfrac{op}{ad}$ 6) $\operatorname{ctan}\theta = \dfrac{ad}{op}$

Nota: Como se definen en un Δ rectángulo, basta con fijar alguno de los otros ángulos (llamado θ), luego por Teo. de Thales sabemos que existen dichas proporciones.

Resultado: Es posible escribir (3-6) en función de (1) y (2):

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \quad ; \quad \operatorname{ctg}\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad ; \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

Comentario: Cuidado con la notación, pues una función inversa no es lo mismo que el inverso multiplicativo:

Ejemplo:

1) $\operatorname{sen}^{-1}\theta = \underline{\operatorname{arcsen}\theta}$ ← Mas adelante lo veremos.

2) $(\operatorname{sen}\theta)^{-1} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \operatorname{cosec}\theta$

Teorema: $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Demostración:

Sabemos que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta$

$$= \left(\frac{op}{hip}\right)^2 + \left(\frac{ad}{hip}\right)^2 = \frac{op^2 + ad^2}{hip^2} = \ldots$$

Luego, como op y ad son catetos de un $\triangle$ rectángulo, se tiene que por Teorema de Pitágoras $op^2 + ad^2 = hip^2$, reemplazando:

$$\Longrightarrow \quad \ldots = \frac{hip^2}{hip^2} = 1 \quad \blacksquare$$

Corolario: 1) $tg^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

2) $ctg^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

Demostración:

Asumiendo cierto el teorema:

1) Sabemos que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \; / \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}$

$$\Longrightarrow \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\Longleftrightarrow tg^2\theta + 1 = \sec^2\theta \,//$$

2) Análogamente como $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \; / \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}$

$$\Longrightarrow 1 + \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\Longleftrightarrow 1 + ctg^2\theta = \csc^2\theta \,//$$

Hay muchos más resultados interesantes, como asignar expresiones para:

1) $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)$ 4) $\operatorname{csec}(\alpha \pm \beta)$
2) $\cos(\alpha \pm \beta)$ 5) $\sec(\alpha \pm \beta)$
3) $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ 6) $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta)$

O considerando $\alpha = \beta$, teniendo lo siguiente:

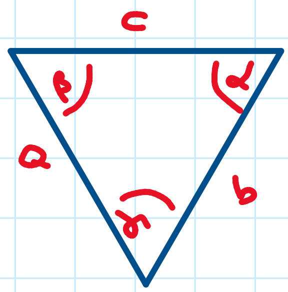
1) $\operatorname{sen}(2\alpha)$ 4) $\operatorname{csec}(2\alpha)$
2) $\cos(2\alpha)$ 5) $\sec(2\alpha)$
3) $\operatorname{tg}(2\alpha)$ 6) $\operatorname{ctg}(2\alpha)$

Revisar video de Youtube para los detalles.

Teorema (del coseno)

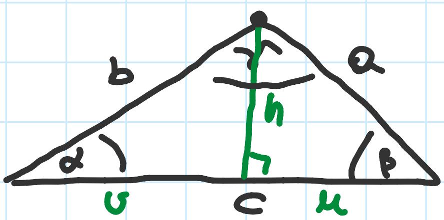
En un Δ cualquiera se cumple que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$



Demostración:

Sea un Δ cualquiera, se definen los siguientes segmentos indicados en los dibujos



$$\Rightarrow \begin{cases} c = u + v \\ a^2 = h^2 + u^2 \\ b^2 = h^2 + v^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{aligned} a^2 &= h^2 + u^2 \\ b^2 &= h^2 + (c-u)^2 \end{aligned}$$

luego
$$a^2 - b^2 = u^2 - (c-u)^2$$
$$'' = u^2 - (c^2 - 2cu + u^2)$$
$$'' = 2cu - c^2$$

reordenando:

$\Longrightarrow a^2 + c^2 - 2cu = b^2$, pero $u = \cos\beta$, luego reordenando:

$$\Rightarrow a^2+c^2-2cu=b^2, \text{ pero } \frac{u}{a}=\cos\beta, \text{ luego}$$

$u=a\cos\beta$

$$\Rightarrow a^2+c^2-2ac\cos\beta=b^2 \blacksquare$$

Teorema (del seno)

En un Δ cualquiera se cumple que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{\gamma}{\operatorname{sen}\gamma}=k\in\mathbb{R}$$

Demostración pendiente

Auxiliar 1 - Desarrollo propuesto

miércoles, 8 de abril de 2020 3:07

Pdq $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Demostración:

Veamos que: $\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)}{2}$ } Hint

Sabemos que:

1) $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$
2) $\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \cos(x)\operatorname{sen}(y)$

Luego (1)+(2) es: $\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(y)$

Con $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ e $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$ se concluye ∎

Reunión y dudas

jueves, 9 de abril de 2020 14:46

1) Clases y conectividad:

- Las cátedras del profe:
  a) Hacer un apunte de las clases
  b) Elaborar material registrable como lecturas o videos.

2) Problemas de conexión:

- Hay 3 categorías de conexión
  a) Poder ver streaming
  b) No poder ver streaming pero sí youtube
  c) No poder ver youtube pero sí descargar PDFs.

- No tener conexión:
  a) Chips milagrosos de la U (solucion?)
  Comentario: Fallan por zona geográfica.

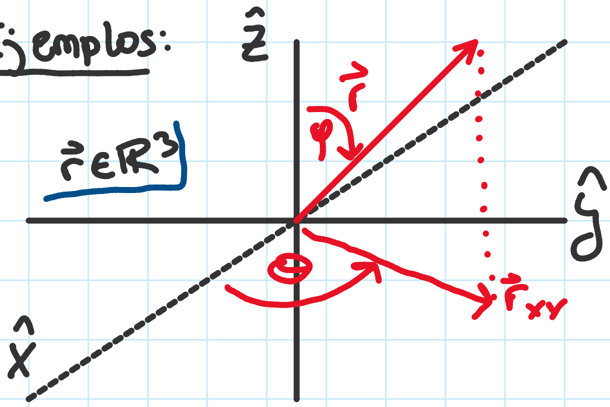
Definición de vector y forma polar

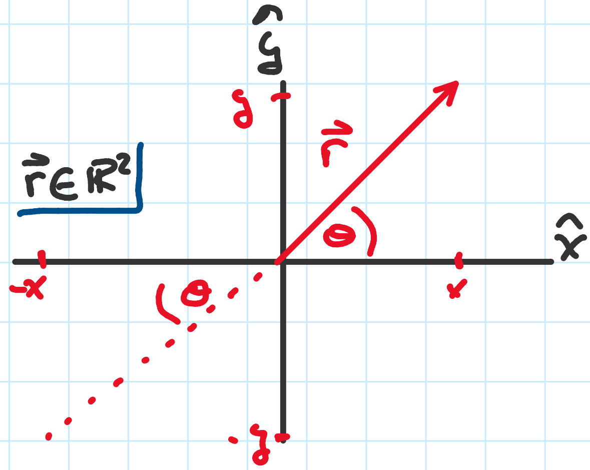
miércoles, 8 de abril de 2020 2:31

Se define un vector $\vec{v}$ como una estructura matemática que se puede identificar como: algo que posee:

1) Magnitud
2) Sentido
3) Dirección } Van de la mano

Ejemplos:





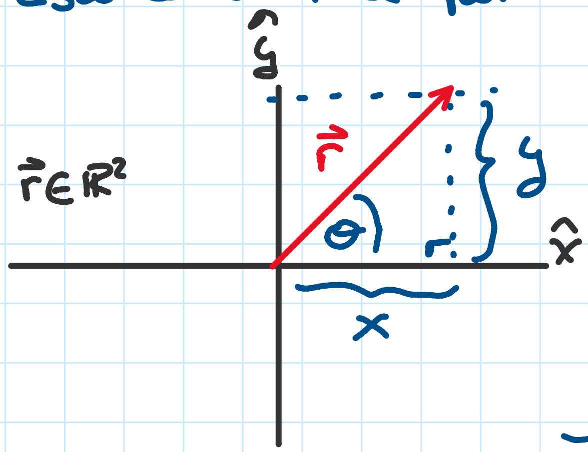
Veamos que un vector $\vec{v}$ se escribe por valores en una n-tupla, osea que si $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

En particular estudiaremos $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, osea $\vec{v} = (x, y)$, donde esto determina un ángulo y una magnitud:

1) $|\vec{v}|^2 = x^2 + y^2 \iff |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2) $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \iff \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ } ¿Función inversa? Khe! (veámoslo en un anexo).

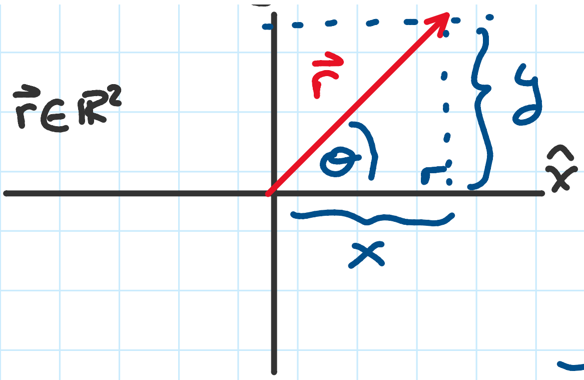
Esto se verifica por lo siguiente



(1) por el teo. de Pitágoras

(2) pues $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$

$\vec{r} \in \mathbb{R}^2$



(1) por el teo. de Pitágoras

(2) pues $\text{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x}$

Aplicando trigonometría, veamos que:

$$\left.\begin{aligned} \text{sen}\,\theta &= \frac{y}{|\vec{r}|} \Rightarrow y = |\vec{r}|\,\text{sen}\,\theta \\ \cos\theta &= \frac{x}{|\vec{r}|} \Rightarrow x = |\vec{r}|\cos\theta \end{aligned}\right\}$$

Se llaman descomposición en coordenadas polares.

Obteniendo así las componentes (x, y)

Anexo matemático: Función inversa y aplicación para despejar un ángulo

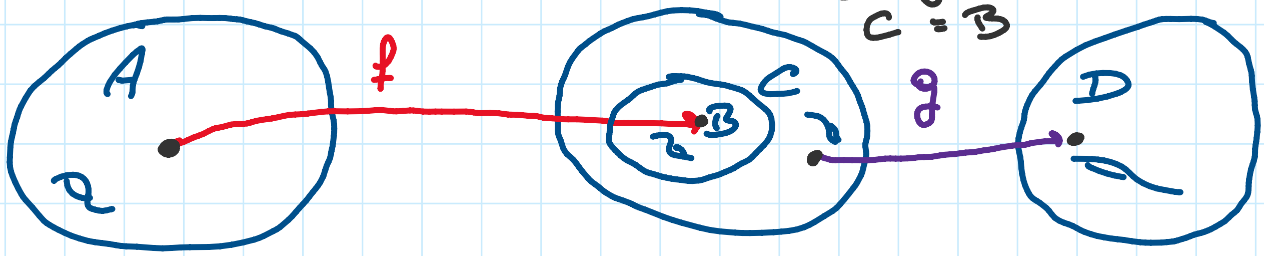
miércoles, 8 de abril de 2020 2:46

Sea $f: A \longrightarrow B$ una función bien definida. osea que $\forall a \in A,\ \exists! b \in B$ tal que $f(a)=b$

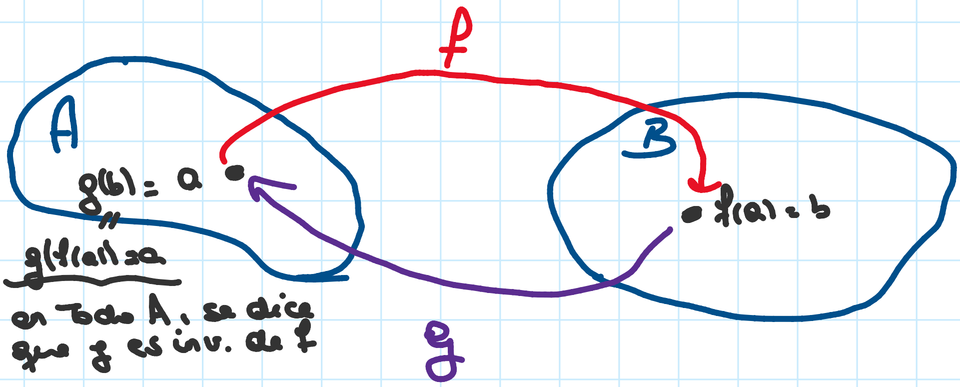
Osea que para un $\bar{a}$, hay una única imagen asignada por medio de f.

Sea $g: C \longrightarrow D$ una función, luego:

$Dom\, g = Rec\, f$
$C = B$



Si se cumple que $B=C$ y $A=D$, se tiene lo siguiente:



Formalmente se requiere:
1) Sobreyectividad.
2) Inyectividad.
lo cual se verá en ramos DIM.

Luego $(g \circ f): A \longrightarrow A$ se dice función identidad
$a \longmapsto (g\circ f)(a) = a$

y además son inversas mútuas, osea $f^{-1}(x) = g(x)$
o bien $g^{-1}(x) = f(x)$ (hay todo un formalismo detrás)

<u>Ejemplos:</u>

1) $\ln(x)$ y $\exp(x)$ en $\mathbb{R}^+$

2) $\mathrm{sen}(x)$ y $\mathrm{arcsen}(x)$ en $(-\pi, \pi)$

2) sen(x) y arcsen(x) en $\underline{(-\pi, \pi)}$

3) cos(x) y arccos(x) en $\underline{(-\pi, \pi)}$

4) tg(x) y $\underline{\text{arctg}}$(x) en $\underline{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$

5) Muchos más

En el curso nos interesará mucho usar la siguiente fn. inv.

$$tg^{-1}\left(tg\,\theta\right) = \frac{y}{x} \Longrightarrow \theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

O bien denotado arctg(x)

Cálculo diferencial

sábado, 11 de abril de 2020 22:39

Objetivo:

Estudiar el marco teórico que sustenta la aplicación de derivadas a funciones que utilizaremos en el curso.

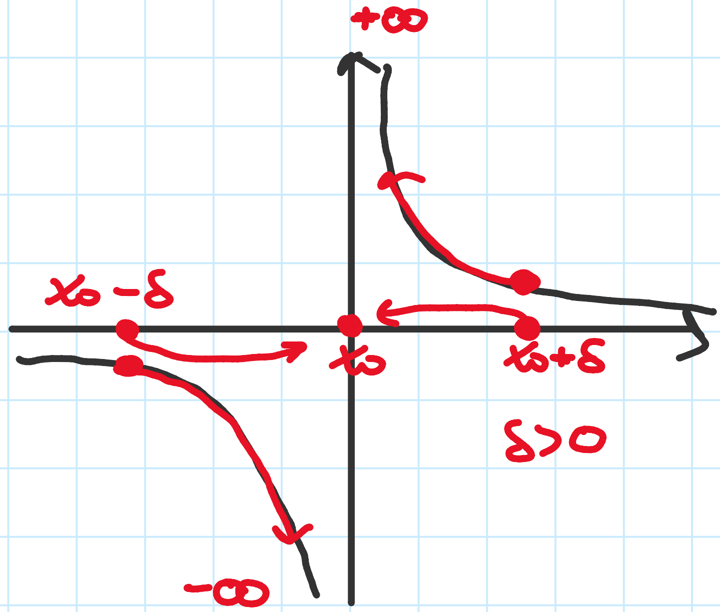
Marco teórico:

- Límites.
- Continuidad.
- Definición de derivada.

Nociones de límites y continuidad

sábado, 11 de abril de 2020 22:48

1)



$x_0 = 0$

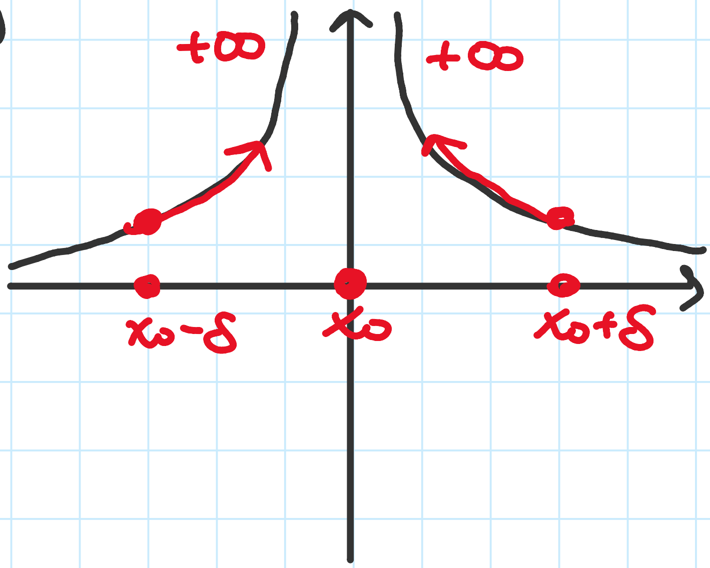
$f(x) = \frac{1}{x^1} \to \cancel{\frac{1}{0}}$

¿Qué ocurre en 0?

1) Tiendo a cosas diferentes

2) Tiendo a cosas no tomables.

2)



$x_0 = 0$

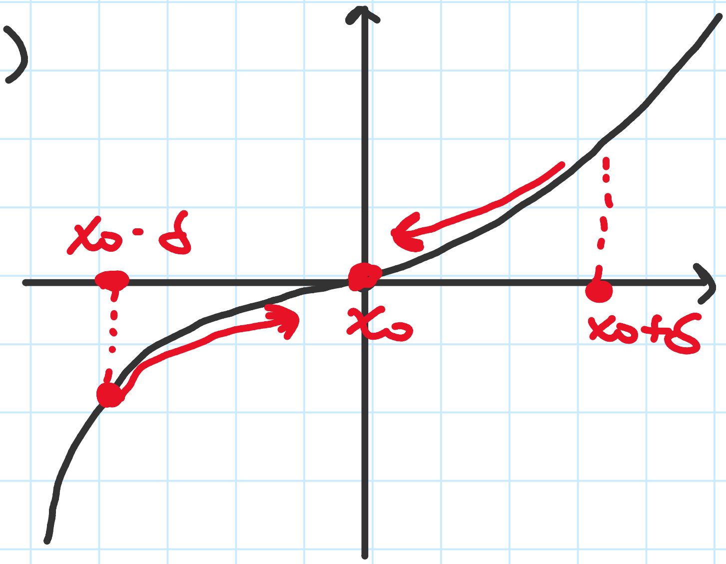
$f(x) = \frac{1}{x^2}$

¿Qué ocurre en 0?

1) Tiendo a lo mismo.

2) Tiendo a algo que no puedo tomar.

3)



$f(x) = x^3$

1) Tiendo a lo mismo.

2) Tiendo a algo tomable.

Def: (Bola)

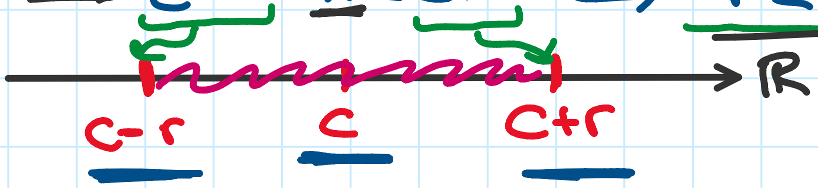
Dado un centro c y radio r, se llama bola a $B(c,r)$...

Ejemplo:

1) $B(c,r) \subseteq \mathbb{R}$, construyamos una def.

Corresponde a los x tales que:

$\rightarrow c-r<x<c+r \Longrightarrow -r<x-c<r$



Por valor absoluto lo escribimos de la forma:

$|x-c|<r$

Luego $B(c,r):=\{x : \underbrace{|x-c|<r}_{\text{es conjunto abto.}}\}$

Def: (Límite)

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ tal que

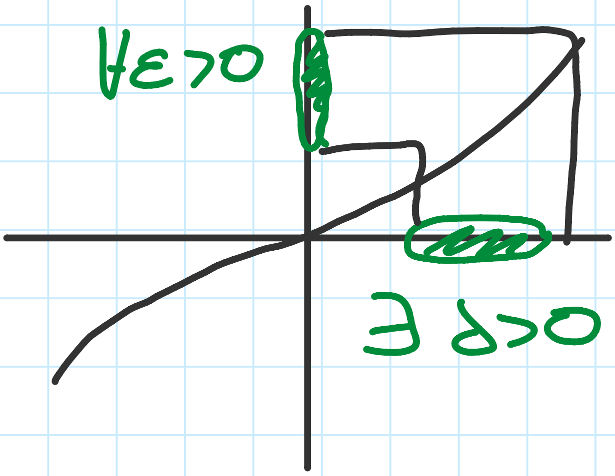
$|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

Def: (Continuidad)

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

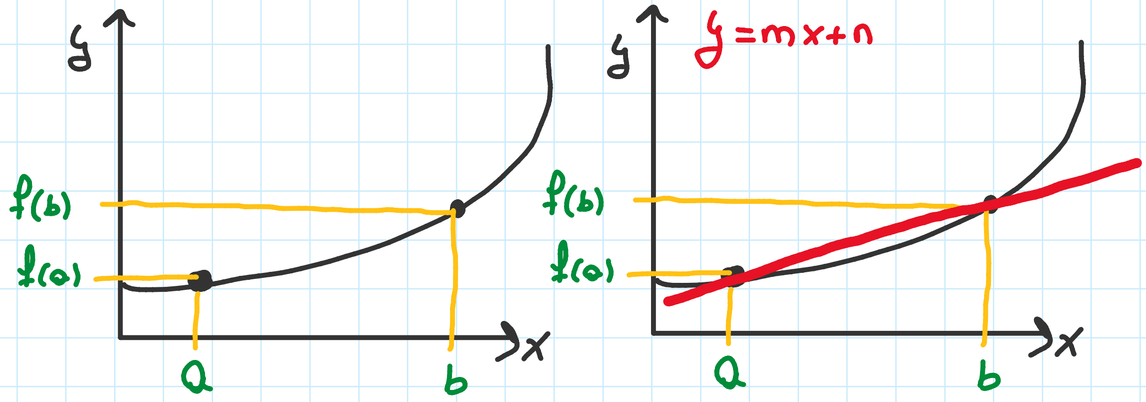
$$L = f(x_0)$$



Definición de derivada y ejemplo

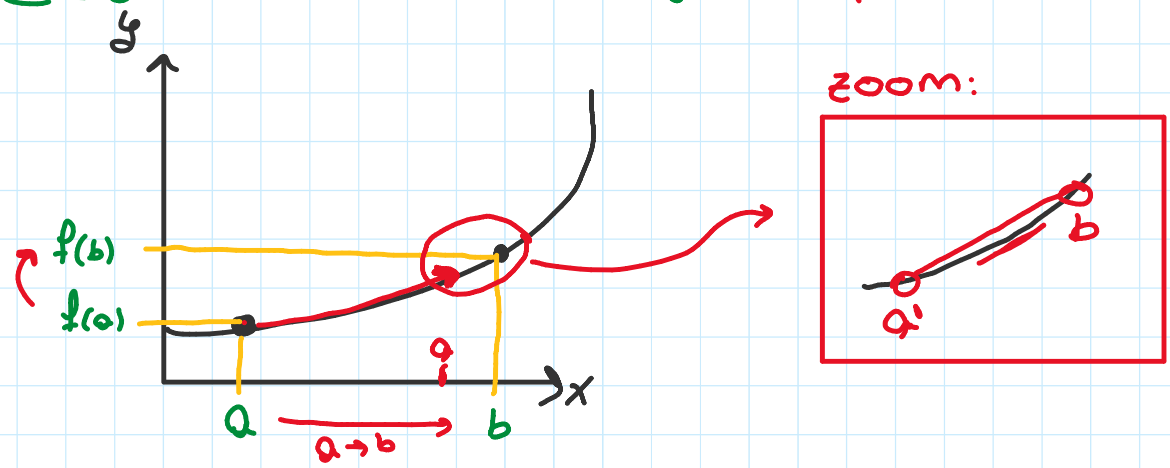
sábado, 11 de abril de 2020 22:48

Sea f una función continua:



Veamos que: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = m \longrightarrow$ Pendiente de la recta que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

¿Qué ocurre si $a \to b$?



Se escribe como:

$\lim\limits_{a \to b} \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \longrightarrow$ Se denota con $\dfrac{df}{dx}(b)$

La derivada en $b \in \mathbb{R}$.

Ejemplo:

Hallar la derivada de $f(x) = x^2$ en el punto a:

Sea $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(a) - f(x)}{a - x} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^2 - x^2}{a - x} \longleftarrow$ Suma × Diferencia.

$$= \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(a-x)}(a+x)}{\cancel{(a-x)}}$$

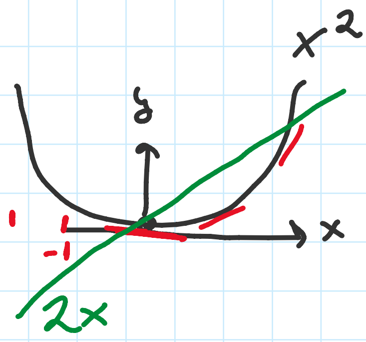
$$= \lim_{x \to a} (a+x) \longrightarrow 2a$$

Reemplazas a en x

Luego $\underbrace{\frac{df}{dx}}_{f'(x)}(a) = 2a$

$f'(x) = \underline{2x}$

$f(x) = x^2$



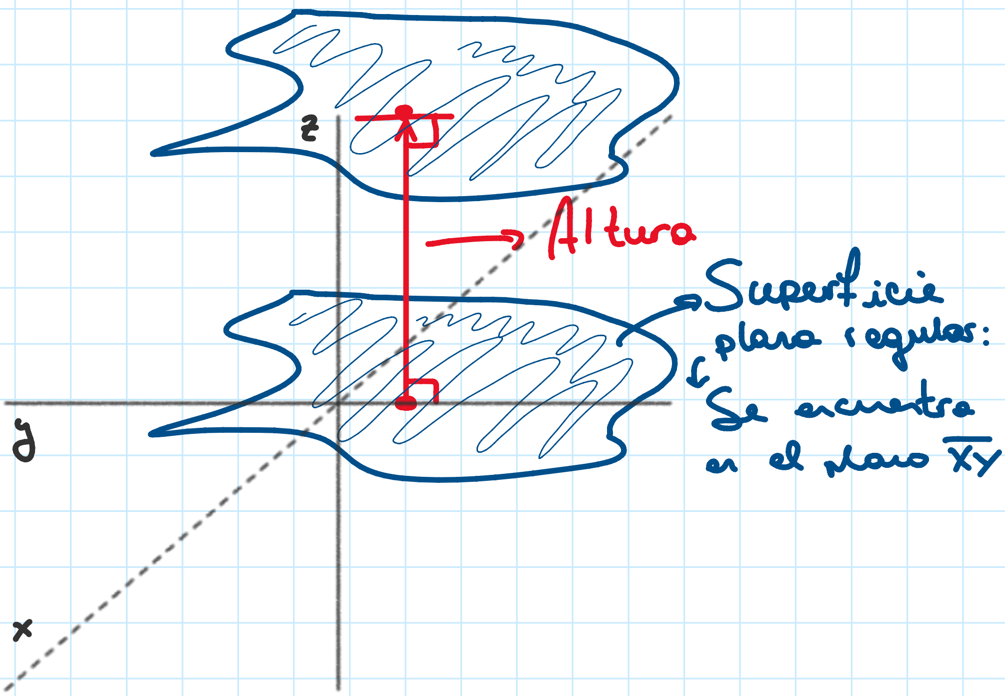
Anexo matemático: Volúmenes para superficies planas y secciones esféricas

sábado, 11 de abril de 2020 19:34

1era forma:

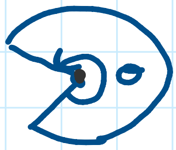
$$\left[\text{Superficie plana}\right] \times \left[\text{Altura}\right]$$

Área



Lo importante es saber calcular el área de la superficie para luego multiplicarla por la altura, algunos ejemplos de áreas son:

1) Círculo $\longrightarrow A = \pi r^2$



$\longrightarrow$ Círculo: $360°$ 2π

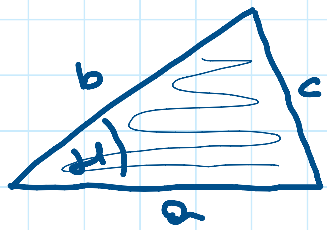
2) Sección circular $\longrightarrow A = \dfrac{\theta r^2}{2}$ donde θ es el ángulo que describe la sección.

Comentario: Tomando $\theta = 2\pi$ se considera todo el círculo como sección, recuperando (1).

3) Triángulo $\longrightarrow A = \dfrac{c \cdot h_c}{2} = \dfrac{b \cdot h_b}{2} = \dfrac{a \cdot h_a}{2}$

3) Triángulo $\longrightarrow$ $A=\frac{c\cdot h_c}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{a\cdot h_a}{2}$

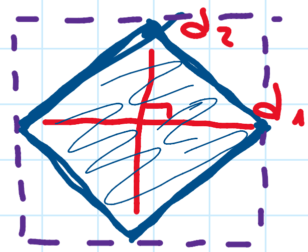
4) Triángulo rectángulo ($\gamma = 90°$) $\longrightarrow$ $A=\frac{hc}{2}=\frac{ab}{2}$



puesto que $\begin{cases} h_b = a \\ h_a = b \end{cases}$

5) Cuadrado $\longrightarrow$ $A = a^2$

6) Rombo $\longrightarrow$ $A=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$



¿Se puede extender a un paralelogramo?

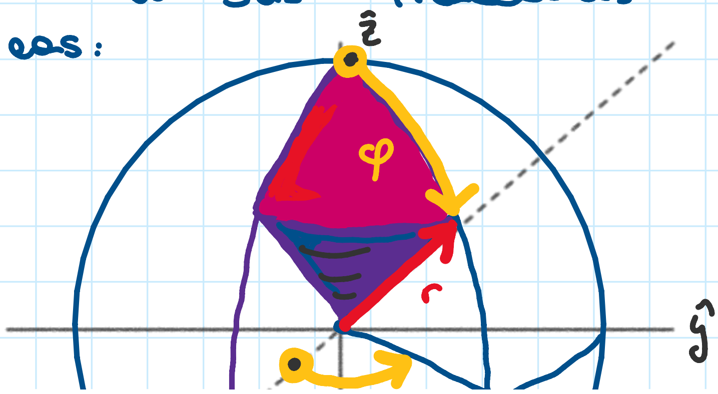
Lo anterior nos permite calcular bastantes volúmenes útiles, pero es necesario tener bases planas

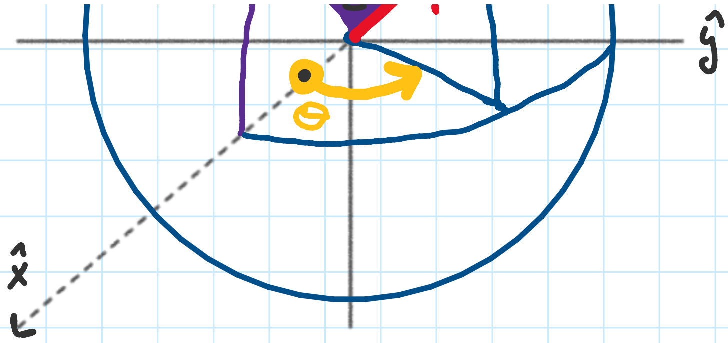
¿Se puede calcular volúmenes no planos?

<u>Resp:</u> Sí, pero se requiere del cálculo integral, por el momento no lo haremos.

<u>2da forma:</u>

A partir de una esfera se pueden calcular volúmenes de sus fracciones o zonas esféricas:





¿Cómo calcular un volumen? Con integrales, pero con una ayudita saquémos una fórmula genérica para usar:

$$V = \int_0^{\varphi}\int_0^{\theta}\int_0^{r} r^2 \operatorname{sen}\varphi \, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{r} r^2 dr \cdot \int_0^{\theta} d\theta \cdot \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi$$

Veámoslo como un ejercicio de anti-derivada, osea ¿Que función derivo respecto a "r" para tener r^2?

$$\frac{d\left(\frac{r^3}{3}\right)}{dr} = 3\cdot\frac{r^2}{3} = r^2 \Rightarrow \int_a^b r^2 dr = \frac{r^3}{3}\Big/_a^b$$

¿Qué función derivo respecto a θ para llegar a 1?

$$\frac{d(\theta^1)}{d\theta} = 1\cdot \underbrace{\theta^{\overset{1-1}{0}}}_{1} = 1 \Rightarrow \int_a^b 1\cdot d\theta = \theta\Big/_a^b$$

¿Qué función derivo respecto a φ para llegar a senφ?

$$\frac{d(-\cos\varphi)}{d\varphi} = -(-\operatorname{sen}(\varphi)) = \operatorname{sen}\varphi \Rightarrow \int_a^b \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi = -\cos\varphi\Big/_a^b$$

Luego reemplazando:

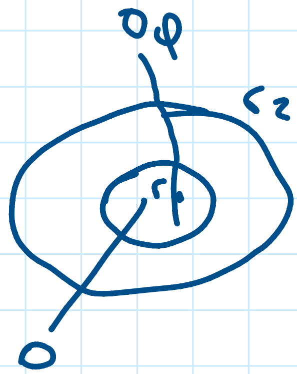
$$Vol = \frac{\bar{r}^3}{3}\Big|_0^r \cdot \bar{\theta}\Big|_0^\theta \cdot (-\cos\bar{\varphi})\Big|_0^\varphi$$

Cuidado

$$= \frac{r^3}{3}\cdot\theta\cdot(-\cos\varphi + \underbrace{\cos 0}_{\to 1})$$

$$= \boxed{\frac{r^3\theta}{3}(1-\cos\varphi)}\ \text{Resultado.}$$

<u>Proposicion:</u> Para una seccion esférica hueca se puede generalizar el resultado anterior:



$$Vol = \frac{r^3}{3}\Big|_{r_1}^{r_2} \cdot \theta\Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \cdot (-\cos\varphi)\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

$$= \left(\frac{r_2^3 - r_1^3}{3}\right)\cdot(\theta_2-\theta_1)\cdot(-\cos\varphi_2+\cos\varphi_1)$$

<u>Resultado:</u> En $V = \frac{r^3\theta}{3}(1-\cos\varphi)$, tomando

$\theta = 2\pi$ y $\varphi = \pi$, $\cos\pi = -1$

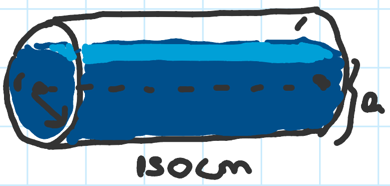
$$\Rightarrow V = \frac{r^3 \cdot 2\pi}{3}\cdot 2 = \frac{4\pi r^3}{3}$$

que corresponde al volumen de una esfera.

Ejercicio: Cálculo de volumen en un cilindro recostado hasta una altura mayor al radio

jueves, 9 de abril de 2020 15:18

$\boxed{P6}$. Un tambor de 50 cm de radio y 1.5 m de largo se encuentra acostado y lleno con parafina hasta una altura $h = 60$ cm. ?Cuántos litros de parafina hay en el tambor?

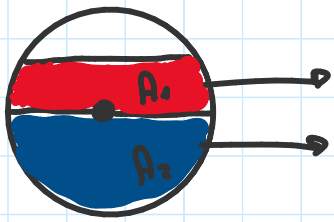


Datos:

$r : 50$ cm $a : 60$ cm $\longrightarrow$ Hay un exceso de 10 cm.

$h : 150$ cm

Calculamos la superficie ocupada del círculo, luego la multiplicamos por h y ganamos:

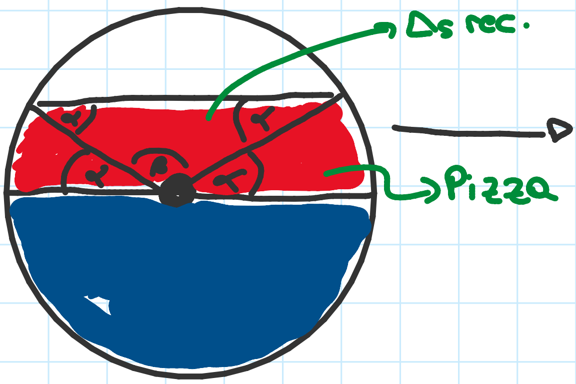


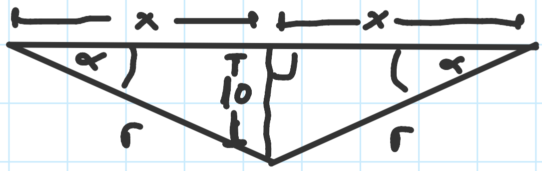
El área buscada se compone de dos partes:

A_1 desconocida

$A_2 = \dfrac{\pi r^2}{2} \Rightarrow A_2$ es conocido.

Calculemos A_1, para ello vemos que se compone de 2 tipos de formas:





Por teo. de Pitágoras

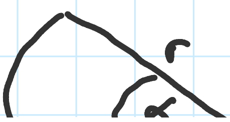
$\Rightarrow r^2 - 10^2 = x^2 \Rightarrow$ Conocemos X.

$\Rightarrow$ Area $\Delta_1 = \dfrac{10X}{2}$

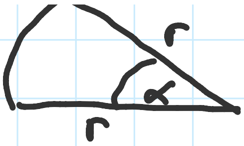
$\Rightarrow$ Area $2\Delta_1 = 10X$ en cm^2

Por otro lado $Tg\alpha = \dfrac{10}{x} \Rightarrow \alpha = \overset{fn.inv.}{arctg}\left(\dfrac{10}{x}\right)$ en rad

y sabemos que $A(\theta) = \dfrac{\theta R^2}{2}$ es el área de una sección circular, entonces:



$\Rightarrow A_{pizza} = \dfrac{\alpha r^2}{2}$



$\Rightarrow A_{pizza} = \frac{\alpha r^2}{2}$

$\Rightarrow \boxed{A_{2pizza} = \alpha r^2}$ en cm^2

luego $A_2 = 10x + \alpha r^2$ (A_2 es conocido).

$\Rightarrow Vol = (A_1 + A_2) h$

$\Rightarrow \boxed{Vol = \left(\frac{\pi r^2}{2} + 10x + \alpha r^2\right) h}$ (Reemplace los valores) en cm^3, luego hay que pasar a litros

P9. Determine el largo mínimo que debe tener una cadena de bicicleta para unir dos poleas de radios R y r, separadas por una distancia D entre sus centros.

Cinemática en 1D: Movimiento rectilíneo

miércoles, 8 de abril de 2020 14:13

Movimiento rectilíneo: (A lo más uniforme acelerado)

La siguiente ecuación describe el comportamiento general del movimiento rectilíneo (a lo más uniformemente acelerado).

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2} \longrightarrow \text{Casos particulares} \begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{1}{2} a_0 t^2 \\ x(t) = x_0 + v_0 t \end{cases}$$

v_0: Velocidad inicial. a_0: Aceleración inicial.

La única condición a respetar es que $\forall t \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene que $a(t) = a_0$ (la ac. es uniforme o constante).

Cálculo: La derivada como pendiente:

La derivada de una función $f(x)$ es una generalización del calculo de pendiente visto para el caso $f(x) = ax + b$ (ecuación de la recta).

Vemos que una pendiente de una recta es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Con esta idea denotaremos a la derivada $\frac{df}{dx}(x)$, notemos que depende de x, pues la pendiente varía según el punto que se tome, se define como:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \Big\} \Delta f \text{ viene a ser un } \Delta y.$$

Comentario: Cuando el intervalo Δx es muy pequeño, decimos que estamos calculando la pendiente sobre un punto en él.

Pero cómo se resuelve algebráicamente la derivada? Es muy sencillo, nosotros conoceremos algunos

¿Pero cómo se resuelve algebráicamente la derivada?
Es muy sencillo, nosotros conoceremos algunos resultados que son demostrables en los cursos de matemática:

Polinomios:

1) $f(x) = c, c \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$
2) $f(x) = mx, m \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = m$
3) $f(x) = mx^2, m \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 2mx$
4) $f(x) = mx^3, m \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 3mx^2$

$$\boxed{f(x) = mx^n, m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow f'(x) = nmx^{n-1}}$$

Suma de funciones

Sea $f(x) = g(x) + h(x)$, luego su derivada es

$$f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Ejemplo:
Sea $f(x) = ax + bx^2$. luego $g(x) = ax$; $h(x) = bx^2$

$\Rightarrow f'(x) = a + 2bx$ es la derivada de $f(x)$

Velocidad y aceleración

Ahora veamos cómo se aplica la derivada en la función $x(t)$.

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$\Rightarrow x'(t) = 0 + v_0 + \frac{2}{2} a_0 t$$

$$\Rightarrow x'(t) = v_0 + a_0 t \rightarrow \text{Velocidad instantánea}$$

¿Y si derivamos ésto?

$$V(t) = v_0 + a_0 t$$

$$\Rightarrow V'(t) = 0 + a_0$$

$\Rightarrow V'(t) = a_0$ → <u>Aceleración instantánea</u>

(recordar que $a(t) = cte = a_0$)

Resumen:

A partir de la ecuación de itinerario, mediante las derivadas podemos obtener:

1) Velocidad instantánea.

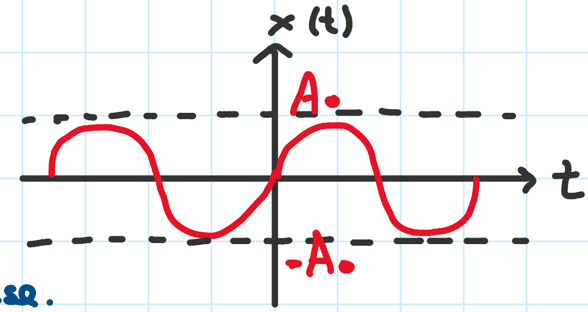
2) Aceleración instantánea.

Cinemática en 1D: Movimiento oscilatorio

jueves, 9 de abril de 2020 21:37

Hay ecuaciones que describen movimientos no rectilíneos (lo cual es evidente que ocurre en la realidad), en particular es de importancia describir un movimiento oscilación:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{A_o}_{\text{Amplitud.}} \cos(\underbrace{\omega_o}_{\text{Frecuencia angular.}} t + \underbrace{\varphi_o}_{\text{Desfase.}})} \rightarrow$$



Cálculo para funciones trigonométricas:

Veamos las derivadas para algunas funciones que vamos a usar para describir movimientos oscilatorios:

1) $f(x) = \mathrm{sen}(x) \implies f'(x) = \cos(x)$
2) $f(x) = \cos(x) \implies f'(x) = -\mathrm{sen}(x)$
3) $f(x) = -\mathrm{sen}(x) \implies f'(x) = -\cos(x)$
4) $f(x) = -\cos(x) \implies f'(x) = \mathrm{sen}(x)$

5) $f(x) = \mathrm{sen}(ax) \implies f'(x) = a \cdot \cos(ax)$ ← Regla de la cadena ¿Por qué?
6) $f(x) = \cos(ax) \implies f'(x) = -a \cdot \mathrm{sen}(ax)$
7) $f(x) = -\mathrm{sen}(ax) \implies f'(x) = -a \cdot \cos(ax)$
8) $f(x) = -\cos(ax) \implies f'(x) = a \cdot \mathrm{sen}(ax)$

Velocidad y aceleración

Utilizando lo anterior, podemos calcular las derivadas para la función $x(t)$:

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\Rightarrow x'(t) = -A_0 \underline{\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi_0) = v(t)$$

$$\Rightarrow x''(t) = -A_0 \underline{\omega_0^2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = a(t)$$

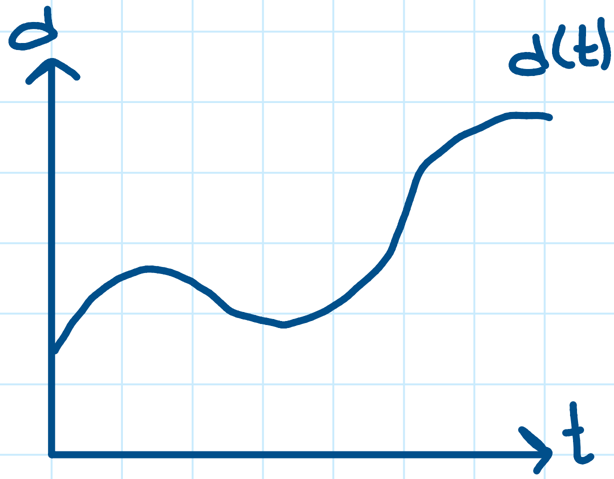
Velocidad media

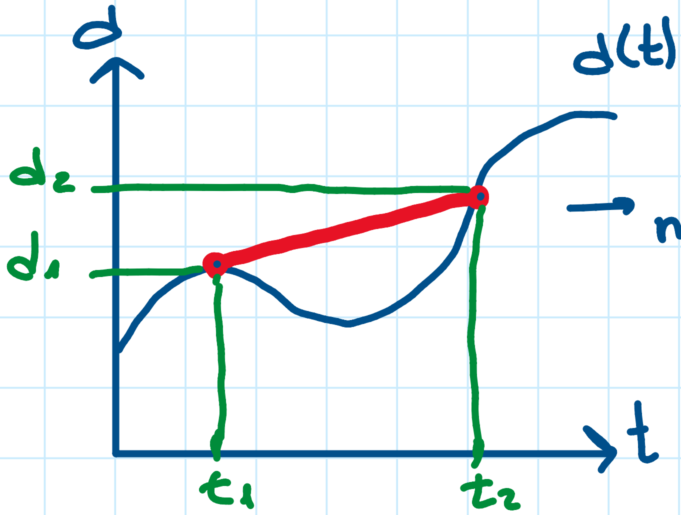
miércoles, 8 de abril de 2020 3:21

¿Qué es una velocidad?

La velocidad es la razón de cambio de la distancia respecto al tiempo.

La razón de cambio es la pendiente.





$$\underbrace{m = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}}_{\text{Velocidad media entre 1 y 2.}}$$

La velocidad media coincide con la velocidad instantánea en el caso en que $d(t)$ sea una ecuación lineal entre 1 y 2.

Esto quiere decir que V es constante en el intervalo (t_1, t_2).

Cinemática en 2D (Introducción)

jueves, 9 de abril de 2020 21:34

El movimiento en 2 dimensiones se puede representar mediante un vector $\vec{r}(t)$, donde cada componente es un movimiento independiente:

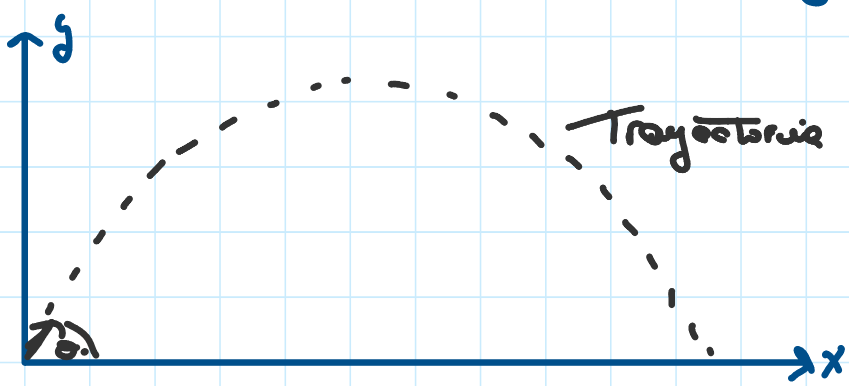
$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

Dos casos a estudiar que son muy importantes:

1) Movimiento parabólico o lanzamiento parabólico:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x} t \\ y_0 + v_{0y} t - \frac{g t^2}{2} \end{pmatrix}$$

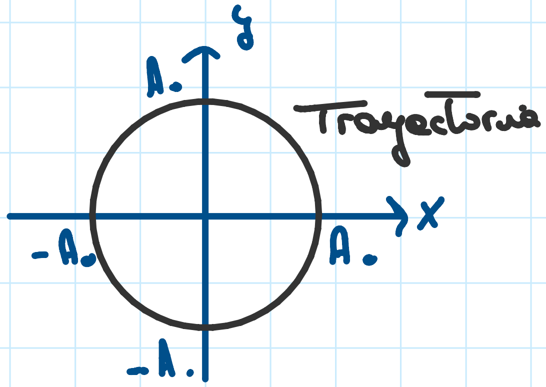
donde en el eje horizontal no hay aceleración y en el eje vertical acelera por la gravedad.



2) Movimiento circular uniforme:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ A_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi_0) \end{pmatrix}$$

donde en cada eje hay una oscilación independiente de la otra.



Comentario: Podemos notar que podemos particularizar los casos vistos a movimientos en 1D.

(1.1) Cuando $y(t)=0 \ \forall t$

$$\Rightarrow \vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0+V_{0x}t \\ 0 \end{pmatrix}$$

que describe un mov. rectilíneo uniforme en el eje x.

(1.2) Cuando $x(t)=0 \ \forall t$

$$\Rightarrow \vec{r}(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ y_0+V_{0y}t-\frac{gt^2}{2} \end{pmatrix}$$

que describe un mov. rectilíneo uniforme acelerado en el eje y. (Usualmente llamado lanzamiento vertical).

(2) Cuando $x(t)=0$ o $y(t)=0$, se recupera el movimiento oscilatorio sobre el eje no nulo.

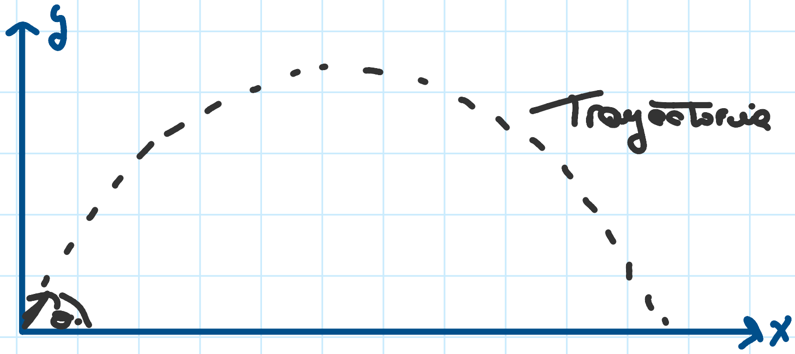
Movimiento parabólico

domingo, 12 de abril de 2020 2:30

Movimiento parabólico
(lanzamiento parabólico):

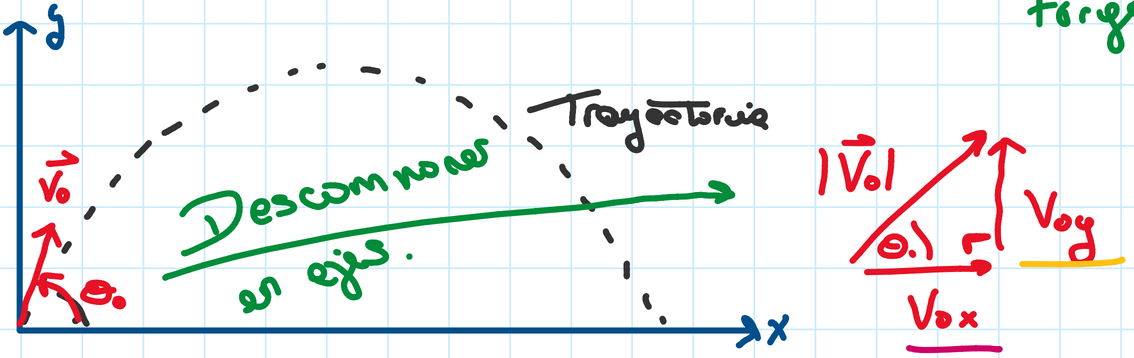
$$\boxed{\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x} t \\ y_0 + v_{0y} t - \frac{g t^2}{2} \end{pmatrix}} \rightarrow$$ Vector de posición.

donde en el eje horizontal no hay aceleración y en el eje vertical acelera por la gravedad.



Digamos que hay una velocidad inicial con una dirección respecto al eje x y una magnitud.

$$\vec{V}_0 = (\underline{V_{0x}}, \underline{V_{0y}}) = (\underline{|\vec{V}_0| \cdot \cos\theta}; \underline{|\vec{V}_0| \cdot \operatorname{sen}\theta})$$ / Usando trigonometría.



Luego, veamos el vector de velocidad, y sus componentes:

Comentarios:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x} t \\ y_0 + v_{0y} t - \frac{g t^2}{2} \end{pmatrix}$$ → Aplicando $\frac{d}{dt}$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x} t \\ y_0 + v_{0y} t - \frac{g t^2}{2} \end{pmatrix}$$

Aplicando d/dt en cada coordenada

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} V_x(t) \\ V_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} - g t \end{pmatrix}$$

→ La velocidad en x es cte.

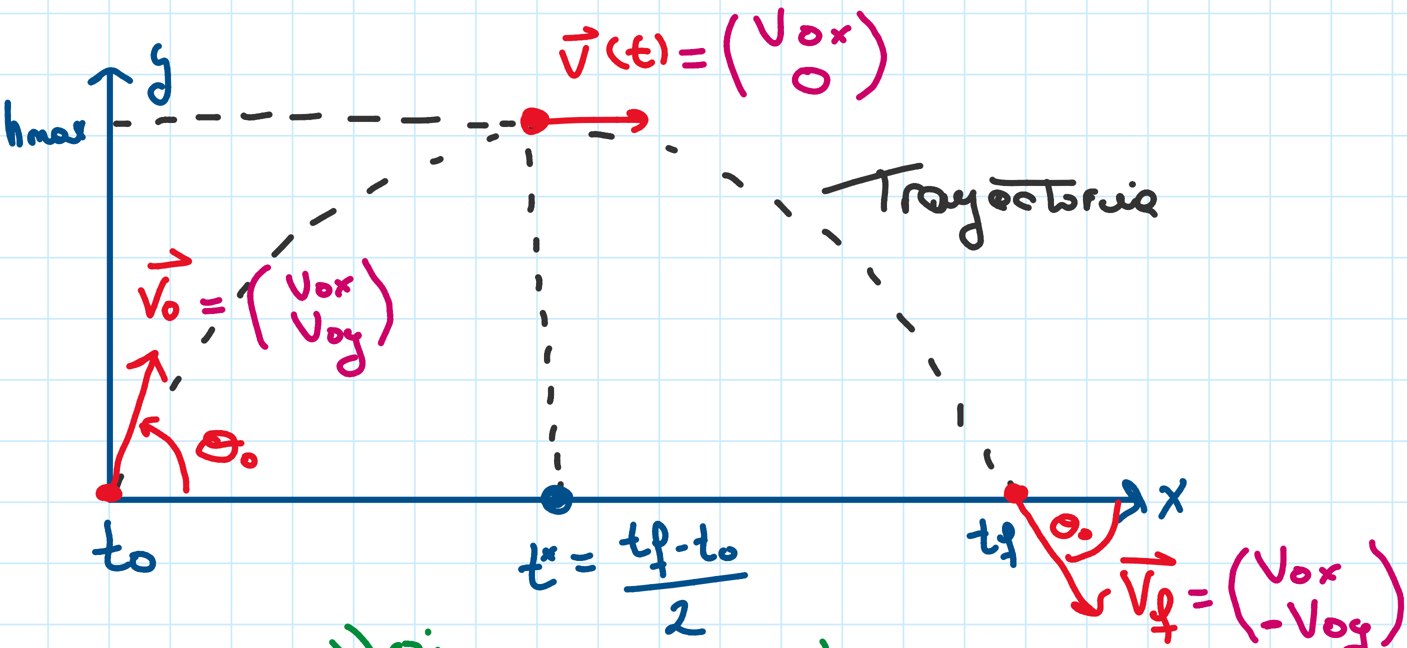
y luego el de aceleración:

Derivando nuevamente.

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

→ Sólo hay aceleración en el eje y.

Puntos importantes del movimiento



Tiempo cuando se alcanza la altura máxima.

Desarrollo:

(1) $y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{g t^2}{2}$

(2) $V_y(t) = v_{0y} - g t$ ⟶ Considerando $V_y(t) = 0$

$$(2) \Longrightarrow 0 = v_{0y} - gt$$

$$\Longleftrightarrow \frac{v_{0y}}{g} = t^*$$

Luego, la altura máxima en (1) es:

$$y(t^*) = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{v_{0y}^2}{2g} = \underline{\underline{y_{max}}}$$

Movimiento circular uniforme

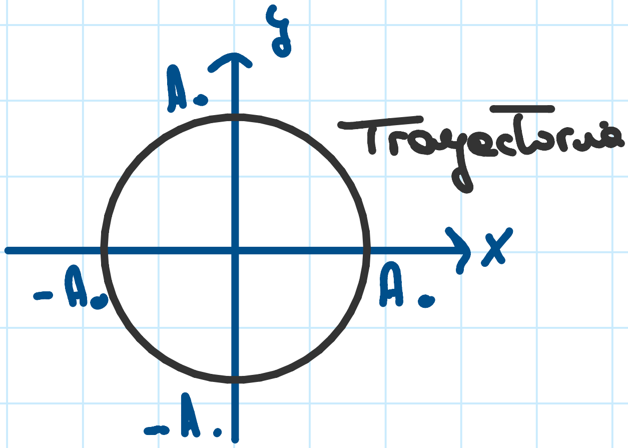
domingo, 12 de abril de 2020 3:08

Movimiento circular uniforme:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A_0} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ \underline{A_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi_0) \end{pmatrix}$$

$\longleftarrow$ ¿Iguales amplitudes?

donde en cada eje hay una oscilación independiente de la otra.



Observación:

Si se tuviesen amplitudes diferentes en x, y, digamos A_0 y B_0, se describiría una elipse.

Veamos el vector de velocidad.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ A_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi_0) \end{pmatrix}$$

Velocidad tangencial.

$$\Longrightarrow \vec{V}(t) = \begin{pmatrix} V_x(t) \\ V_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_0 \omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi_0) \\ A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \end{pmatrix}$$

Luego, la aceleración

$$\Longrightarrow \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ -A_0 \omega_0^2 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi_0) \end{pmatrix}$$

$$= -\omega_0^2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ A_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi_0) \end{pmatrix}}_{\text{notar que:}}$$

$$= -\omega_0^2 \cdot \vec{r}(t)$$

Aceleración centrípeta.