PAUTA AUXILIAR #1 - TRIGONOMETRÍA E INTRODUCCIÓN A LA CINEMÁTICA
FI1000 - INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA CLÁSICA.

PROFESOR: CLAUDIO ROMERO - AUXILIARES: MANUEL TORRES - FELIPE CUBILLOS - VALENTINA SEGOVIA

Resumen de trigonometría

Algunas propiedades trigonométricas fáciles de demostrar son:

(1) Propiedades de la periocidad de la función:

$$sen(\alpha) = -sen(-\alpha)$$
$$cos(\alpha) = cos(-\alpha)$$
$$sin(\pi/2 - \alpha) = cos(\alpha)$$

(2) Identidades pitagóricas:

$$sen(\alpha)^2 + cos(\alpha)^2 = 1$$
$$tan(\alpha)^2 + 1 = sec(\alpha)^2$$
$$ctg(\alpha)^2 + 1 = csc(\alpha)^2$$

(3) Sumas y restas de ángulos:

$$sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha)cos(\beta) + sen(\beta)cos(\alpha)$$
$$sen(\alpha - \beta) = sen(\alpha)cos(\beta) - sen(\beta)cos(\alpha)$$
$$cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)$$
$$cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta)$$
$$tan(\alpha + \beta) = sen(\alpha + \beta)/cos(\alpha + \beta)$$
$$tan(\alpha - \beta) = sen(\alpha - \beta)/cos(\alpha - \beta)$$

(4) Semi-ángulos:

$$sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)cos(\alpha)$$
$$cos(2\alpha) = cos(\alpha)^2 - sen(\alpha)^2$$
$$cos(2\alpha) = 1 - 2sen(\alpha)^2$$
$$cos(2\alpha) = 2cos(\alpha)^2 - 1$$

(5) Teorema del coseno:
Sea el triángulo $\triangle ABC$ y el ángulo α opuesto a la arista A, entonces:

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BCcos(\alpha)$$

(6) Teorema del seno:
Sea el triángulo $\triangle ABC$ y los ángulos α, β, γ opuestos a las aristas A, B, C respectivamente, entonces:

$$\frac{A}{sen(\alpha)} = \frac{B}{sen(\beta)} = \frac{C}{sen(\gamma)}$$

Problema #1
Demuestre las siguientes relaciones trigonométricas:

(1)
$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

(2)
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

(3)
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Desarrollo problema #1
Comentario: Para probar identidades (igualdades) trigonométricas, basta con comenzar trabajando un lado de la igualdad y llegar al otro, para ello usualmente se utilizan otras identidades ya probadas previamente, puesto que todas son una construcción a partir de las definiciones originales de dichas funciones, y cada vez es posible probar identidades más complejas a partir de las previas.

(1) Para comenzar, se sabe que $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, luego dividiendo en toda la expresión $\cos^2\alpha$ se tiene que:

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} (= \sec^2\alpha)$$

Luego, aplicando raíz a la igualdad anterior se tiene que:

$$\sqrt{\tan^2\alpha+1}=\frac{1}{\cos\alpha}$$

Veamos que $\sqrt{\tan^2\alpha+1}=\sec\alpha$, por lo tanto, reemplazando en el lado derecho de la igualdad, para luego simplificar se tiene que:

$$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}}=\frac{\tan\alpha}{\sec\alpha}=\sin\alpha$$

.

(2) Veamos que los términos presentes en el lado derecho son:

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$1-\tan\alpha\tan\beta=1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Ahora basta con dividirlos para construir la expresión del lado derecho de la igualdad, teniendo:

$$\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

Finalmente utilizando la propiedad de suma/resta de ángulos dentro de sin o cos, se concluye que

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\tan(\alpha+\beta)$$

.

(3) Propuesto.

Problema #2

Un conductor maneja su coche durante 10km a una velocidad de 90Km/h, luego otros 10Km maneja a una velocidad de 70Km/h.¿Cuál es la rapidez promedio durante el trayecto de 20Km?

Desarrollo problema #2

Para comenzar, calculemos el tiempo que se demoró en recorrer cada trayecto, para ello basta con conocer la distancia recorrida y la velocidad con la que se recorrió ($\frac{d}{v}=t$).

(1) $\frac{10Km}{90Km/h}=\frac{1}{9}h=t_1$

(2) $\frac{10Km}{70Km/h}=\frac{1}{7}h=t_2$

Luego el intervalo de tiempo en que se recorrieron 20Km es de $t=t_1+t_2$, entonces la velocidad promedio será:

$$\bar{v}=\frac{20}{\frac{1}{9}+\frac{1}{7}}Km/h$$

Problema #3

La figura muestra la posición de una partícula en función del tiempo, encuentre la velocidad promedio en los siguientes intervalos:

(1) $0s<t<4s$.

(2) $7s<t<10s$.

(3) $0s<t<13s$.

(4) $10s<t<13s$.

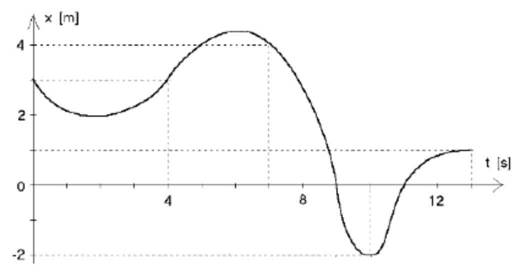

FIGURE 1. Gráfico de posición vs tiempo.

Desarrollo problema #3

Comentario: La velocidad media en un intervalo corresponde a la pendiente de la recta que une los dos puntos de un gráfico de posición vs tiempo en el intervalo considerado:

$$\bar{v}_{ab} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_a - x_b}{t_a - t_b}$$

(1) En el primer intervalo, $x_i = x_f = 3m$, luego $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \bar{v} = 0m/s$.
(2) En el segundo intervalo se tiene que $x_i = 4m$, $x_f = -2m$ y $\Delta t = 3s$, por lo tanto $\bar{v} = -2m/s$.
(3) En el tercer intervalo, se tiene que $x_i = 3m$, $x_f = 1m$ y $\Delta t = 13s$, luego $\bar{v} = \frac{-2}{13}m/s$.
(4) En el cuarto intervalo, se tiene que $x_i = -2m$, $x_f = 1m$ y $\Delta t = 3s$, luego $\bar{v} = 1m/s$.