# CC3102 - 2020/01
# Guía de Ejercicios 4: *Lema de Bombeo y Clausuras*
# 17 de junio de 2020

**IMPORTANTE:** Que un lenguaje cumpla el lema de bombeo no implica que este sea regular (es decir, el lema no permite demostrar que un lenguaje es regular).

1. Para probar que un lenguaje no es regular utilizando el lema de bombeo se le pide al 'adversario' separar el string $w$ en 3 partes, tal que $w = xyz$, con $|y| \geq 1$. Demuestre que se puede exigir la restricción de $|y| \geq 2$ manteniendo la correctitud del lema.
   *Hint:* Muestre que agrandando $N$ se puede obligar a que el autómata visite algún estado 3 veces y use esto para concluir lo pedido.

2. Demuestre utilizando el lema de bombeo que los siguientes lenguajes no son regulares:
   (a) $L = \{0^n \mid n \text{ es primo}\}$
   (b) $L = \{w \mid w \in \{c, d\}^* \text{ y } w \text{ tiene la misma cantidad de } c\text{'}s \text{ que de } d\text{'}s\}$
   (c) $L = \{w \mid w \in \{j, k, l\}^* \text{ y en } w \text{ el substring } jk \text{ está presente igual cantidad de veces que el substring } kj\}$

3. Demuestre o refute lo siguiente: Si $L$ es un lenguaje no regular y $S$ es un conjunto finito de strings, $L \cup S$ es no regular.

4. Demuestre o refute la siguiente propiedad de clausura para lenguajes regulares:

   Dado un lenguaje $L$ sobre un alfabeto $\Sigma$, definimos el lenguaje $L^{(n|2n)}$ con $n \in \mathbb{N}$, como el lenguaje de todos los strings $w \in L$ tales que $w$ tiene o bien largo menor o igual que $n$, o bien largo mayor o igual que $2n$. Si $L$ es un lenguaje regular entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $L^{(n|2n)}$ también es regular.

## Soluciones

1. Primero se mostrará lo que indica el *hint*. Para esto se considerará un AFD con una cantidad $K$ de estados y un string de largo $N = 2K$, aceptado por el autómata. Con esta proporción se obtiene que para procesar el string completo deben realizarse $2K$ transiciones (una por cada símbolo), es decir, se debe pasar por algún estado $2K + 1$ veces. Como el autómata tiene solo $K$ estados, por el principio del palomar se concluye que hay al menos un estado que es visitado 3 veces.

   Para concluir la correctitud del lema entonces se definirá un $N$ suficientemente grande, garantizando la existencia de un estado visitado al menos 3 veces, por el cual debe pasar un ciclo. Desde la primera vez que se llega a dicho estado hasta la tercera se forma un string cuyo largo es mínimo 2, por lo que basta que $y$ sea dicho string para cumplir con la nueva restricción. Al bombear este $y$, como es parte del ciclo, siempre se mantendrá dentro del lenguaje.

2. (a) El primer paso, dado que se debe cumplir para todo $N$, es elegir una palabra que pertenezca al lenguaje y cumpla las condiciones pedidas por el lema, en este caso: $w = 0^s$, con $s$ primo, y $s \geq (N + 2)$ (para que sea suficientemente largo). Definiendo $s = a + b + c$, se puede escribir $x = 0^a, y = 0^b$ y $z = 0^c$ de tal forma que $w = xyz$. Cabe mencionar que $a \geq 0$, $b \geq 1$ y $c \geq 2$. El objetivo ahora es encontrar un $i$ que bombee $y$ en $w$, de tal forma que este último se salga del lenguaje (es decir, que su largo sea un número compuesto). Esto se puede expresar así:

   $$a + bi + c = pq, \text{ con } p, q \geq 2, \; pq \geq 4$$
   $$\Rightarrow pq - (a + c) = bi$$

   Por inspección y sin pérdida de generalidad se puede proponer $q = a + c$, pues permite factorizar la resta:

   $$p(a + c) - (a + c) = bi$$
   $$\Rightarrow (a + c)(p - 1) = bi$$

   Despejando $i$ queda:

   $$i = \frac{(a + c)(p - 1)}{b}$$

   Sabiendo que $i \in \mathbb{N}$, se puede asignar $p = b + 1 \Rightarrow i = a + c$. Si es que los factores que se determinaron cumplen con sus condiciones, ya se encontró el bombeo adecuado. En efecto, $q = a + c \geq 2$, $p = b + 1 \geq 2$, $pq \geq 4$, por lo que, como el lenguaje cumple la negación del lema de bombeo, se puede concluir que no es regular.

   (b) Para demostrarlo utilizando que no cumple el lema de bombeo basta con considerar $w = c^N d^N \in L$. Dado que $y$ solo contendrá $c$'s, para cualquier bombeo distinto de 1 que se haga el string saldrá del lenguaje, ya que tendrá una cantidad distinta de $c$'s que de $d$'s.

   (c) Se considerará el string $w = (jkl)^N l(kjl)^N$, que pertenece a $L$, y se definirá de inmediato que el bombeo se hará con $i = 0$. Lo útil de este string es que en los primeros $N$ caracteres solo tiene apariciones de $jk$, y en los siguientes $N + 1$ solo de $kj$, permitiendo manipular fácilmente ambas secuencias. Hay dos casos para la definición de $y$, que se desglosarán a continuación:

   - *$y$ contiene al menos una aparición de $j$ o $k$.* Bombeando esto a 0, se eliminará al menos una aparición de $jk$ sin disminuir la cantidad de $kj$, sacando a $w$ de $L$.
   - $y = l$. Cada $l$ eliminada crea una nueva aparición de $kj$, sin aumentar las de $jk$, incumpliendo las condiciones de $L$.

   Dado que en ambos casos el string deja de pertenecer al lenguaje, se concluye que este no cumple el lema de bombeo, y por lo tanto, no es regular.

3. Supondremos que es falso, es decir, que la unión dada es regular. Sabemos que $S$ es regular debido a que es finito, y por propiedades de clausura, su complemento $S^c$ también es regular. Entonces, si $L \cup S$ es regular, entonces $(L \cup S) \cap S^c = L \cap S^c$ es regular. También, dado que $L \cap S \subseteq S$, dicha intersección es finita, y por lo tanto regular.
   Teniendo lo anterior, se concluye que $(L \cap S) \cup (L \cap S^c) = L$ es regular, porque los lenguajes regulares son cerrados bajo unión. Esto es una contradicción, por lo tanto $L \cup S$ no es regular.

4. Sobre un alfabeto $\Sigma$ definimos el lenguaje $\Sigma^{(n)}$ con $n \in \mathbb{N}$, como el lenguaje de los strings $w \in \Sigma^*$ tales que $|w| \leq n$. Análogamente definimos $\Sigma^{(2n)}$ como el lenguaje de los strings de largo mayor o igual a $2n$. $\Sigma^{(n)}$ es regular por ser un lenguaje finito. $\Sigma^{(2n)}$ también es regular por ser el complemento de un lenguaje finito.

   Notemos ahora que $L^{(n|2n)} = L \cap (\Sigma^{(n)} \cup \Sigma^{(2n)})$. Por propiedades de clausura de los lenguajes regulares concluimos que $L^{(n|2n)}$ es también regular. Notar que $n$ es fijo.