Tarea 9: Enanas Café y Remanentes Estelares

1. **Pop Quiz** Responda las siguientes preguntas en 2-5 líneas.

   - Explique el significado del colapso de cola de Wien (Wien's Tail Collapse). ¿Para qué tipo de subestrellas esto es importante?
   - ¿Por qué son azulados los colores infrarrojos de las enanas café tipo-T?
   - Explique el límite de Chandrasekhar.

   Respuesta

   - Primero, la cola de Wien es la sección de mayor longitud de onda del espectro estelar. Su colapso describe una reducción en la intensidad de emisión en estas longitudes de onda. Es importante en enanas Y, donde este fenómeno ocurre y les da un tono azul.
   - Esto ocurre porque el espectro de las enanas café tipo T es dominado por las bandas de absorción de metano (CH_4) y agua. Las líneas de absorción de las colisiones entre metano, agua e hidrógeno molecular le dan a estas estrellas su tono azul en el infrarrojo.
   - Es el límite de masa más allá del cual la degeneración de electrones no es capaz de contrarrestar la fuerza de gravedad en un remanente estelar, produciéndose un colapso que origina una estrella de neutrones o un agujero negro. El límite es xx masas solares

2. **Pregunta 2** Las enanas café (al igual que las enanas blancas) son mantenidas por la presión degenerada de electrones. Con el principio de incertidumbre de Heissenberg, la distribución de Maxwell-Boltzmann y el principio de exclusión de Pauli aplicado a electrones, derive la expresión para la presión degenerada de electrones:

$$P_{\text{e, deg}} = K_1^{'} \times (\rho/\mu_e)\,(5/3)\,,$$

   donde $P_{\text{e, deg}}$ es la presión degenerada, $K_1^{'}$ es una constante, ρ es la densidad del gas, $1/\mu_e = 1/2 \times (1+X)$ es el número de electrones libres para un gas completamente ionizado, donde X es la fracción de masa de H. Muestre todos los pasos.

   Respuesta

   Si asumimos que los electrones en una enana café forman un gas ideal, podemos usar la ley de los gases ideales para encontrar la presión

$$P_e = n_e kT, \tag{1}$$

   donde n_e es el número de electrones libres por unidad de volumen. Asumimos que los átomos dentro de la BD están completamente ionizados (lo que es cierto para hidrógeno y helio a la T promedio de las BD), entonces podemos escribir el número de electrones por unidad de volumen como:

$$n_e = \sum_{i=1}^{N} Z_i n_i$$

Donde Z_i y n_i son el numero atomico y el numero de atomos del elemento i-esimo. Podemos escribir una funcion de la fraccion de masa del i-esimo elemento X_i como

$$n_e = \frac{\rho}{m_H} \sum_{i=1}^{N} X_i \frac{Z_i}{A_i},$$

donde A_i es la masa atomica. Ahora podemos dedfinir el inverso del promedio de electrones libres por nucleo como

$$\frac{1}{\mu_e} \equiv \sum_{i=1}^{N} X_i \frac{Z_i}{A_i}.$$

Luego podemos escribir el numero de electrones como

$$n_e = \frac{\rho}{\mu_e m_H}.$$

Sustituyendo esto por n_e en la eq 1, tenemos

$$P_e = \frac{\rho}{\mu_e m_H} kT,$$

Ahora, del principio de incertidumbre de Heisenberg tenemos

$$\Delta V \Delta^3 p \geq h^3$$

Donde V es el volumen y p es el momentum. Volviendo al gas ideal de electrones con temperatura T, sabemos que el momentum esta determinado solo por la temperatura, de acuerdo a la distribucion de Maxwell-Boltzmann. Si el gas esta comprimido, el volumen incrementa. Mientras T (y por tanto p) sea lo suficientemente grande, el principio de incertidumbre no es violado. Sin embargo, cuando mas gas es comprimido, su densidad incrementa de tal modo que el rango de momentum mostrado por el ppio de incertidumbre excede el correspondiente a la temperatura del gas. Esto es, la presion de los electrones debe ser mayor que la inferida por la temperatura. Para explicar esto, debemos tomar otro principio cuantico en consideracion, el principio de exclusion de Pauli. Este dice que dos electrones no pueden ocupar el mismo estado cuantico al mismo tiempo, o dos electrones no pueden tener el mismo momentum y spin. Entonces cada elemento del espacio de fase (momento y posicion) solo pueden ser ocupados por dos electrones maximo. La presion generada por los electrones sera forzada a estados de mayor momentum mientras incrementa la densidad. Esto es llamado presion degenerada. En el punto de degeneracion maxima (llamado Karol Dance) se dice que todos los posibles estados de momentum estan ocupados hasta que se llega a un valor maximo, donde una vez que $\Delta V \Delta^3 p$ es minimizado, la desigualdad se convierte en igualdad. Luego, aplicando el principio de incertidumbre de Heisenberg y el ppio de exclusion de Pauli a un gas degenerado de electrones que sigue la distribucion de maxwell boltzmann,

$$n_e p dp = \frac{8\pi p^2}{h^3} dp.$$

El momento maximo puede ser obtenido integrando entre 0 y $p_{\max}$

$$p_{\max} = \left(\frac{3h^3 n_e}{8\pi} \right)^{1/3}.$$

Y usando

$$P = \int_0^\infty v p n(p) dp,$$

encontramos que

$$P_{e,deg} = \frac{8\pi}{15 m_e h^3} p_{\max}^5. \tag{2}$$

Finalmente, sustituyendo en las ecuaciones para $p_{\max}$ y n_e, obtenemos

$$P_{e,deg} = \frac{1}{m_H^{5/3}} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}$$

3. **Estrella de Neutrones** Tome un púlsar con período P_0 y su derivada $\dot{P}_0$ a $t = 0$. Si asumimos que el producto $P\dot{P}$ es constante en el tiempo, integre para obtener una expresión para $P(t)$.

   Respuesta

   Primero tenemos

$$P(t)\dot{P}(t) = cte = k.$$

   Multiplicando ambos lados por 2 y usando eso como la derivada de una función cuadrática, tenemos

$$2P(t)\dot{P}(t) = 2k,$$

$$\frac{d}{dt} P^2(t) = 2k.$$

   Integrando nos da

$$P^2(t) = 2kt + C,$$

$$P(t) = \sqrt{2kt + C}.$$

   Implementando las condiciones iniciales

$$P(0) = P_0 = \sqrt{C},$$

y así $P_0^2 = C$. También, para la derivada

$$\dot{P}_0 = \frac{2k}{2P_0},$$

y de ese modo combinadas, $P_0\dot{P}_0 = k$. Usando nuestras constantes, finalmente tenemos

$$P(t) = \sqrt{2P_0\dot{P}_0 t + P_0^2}.$$

4. **Crab Nebula** Durante un glitch, el periodo pulsar de la crab nebula es reducido por $|\Delta P| = 10^{-8}P$. Si el incremento en velocidad angular es debido a una pequeña contracción de la estrella de neutrones, encuentre el cambio en el radio de la estrella. Suponga que la estrella de neutrones es una esfera uniforme con radio inicial $R_0 = 10$ km.

   Respuesta

   Usando la conservación de momento angular, el momento inicial L_i debería ser igual al momento final L_f. Sea $R_i = 10^4$ metros el radio inicial, $\omega_i = 2\pi/P$ la velocidad angular inicial, M la masa estelar, R_f la velocidad final, y $\omega_i = 2\pi/P - |\Delta P|$. Con esto tenemos

$$L_i = L_f,$$

$$M\omega_i R_i^2 = M\omega_f R_f^2,$$

$$\frac{2\pi}{P}10^8 = \frac{2\pi}{P - P10^{-8}} R_f^2,$$

$$\left(1 - 10^{-8}\right)10^8 = R_f^2,$$

$$R_f = 10^4\sqrt{1 - 10^{-8}},$$

$$R_f = 9999.99995,$$

$$|\Delta R| = 5 \cdot 10^{-5}[\text{metros}].$$