Tarea 6: Binarias y Secuencia Principal

1. **Binarias**

   Como un ejemplo simple, suponga que las mediciones de Doppler muestran que las velocidades radiales de dos estrellas tienen variaciones en el tiempo mostradas en la fig 1. Por la naturaleza sinusoidal de las variaciones, podemos deducir que la órbita es circular con periodo binario P=11.0 días. Sean las masas de las dos estrellas m_1 y m_2 con $m_2 < m_1$. Si r equivale a la (desconocida) separación relativa, las estrellas m_1 y m_2 mantienen distancias constantes respecto al centro de masa (CM) dado, respectivamente, por $r_1 = [m_2/(m_1 + m_2)]r$ y $r_2 = [m_1/(m_1 + m_2)]r$. La velocidad de las estrellas m_1 y m_2 respecto al centro de masas son también constantes, y dadas respectivamente por Ωr_1 y Ωr_2, donde $\Omega = 2\pi/P$ es la velocidad angular. Muestre que la segunda ley de Newton, aplicada a cualquiera de las estrellas, requiere que

   $$\Omega^2 = G(m_1 + m_2)/r^3.$$

   Muestre también que si la normal al plano orbital está inclinada por un ángulo (desconocido) de la línea de visión (donde i=90º corresponde a ver de lado), el máximo de velocidades de Doppler observables para las estrellas m_1 y m_2 relativas al centro de masa, son $K_1 = \Omega r_1 \sin(i)$ y $K_2 = \Omega r_2 \sin(i)$. Como $r_1 + r_2 = r$, elimine r_1 y r_2 para derivar las siguientes relaciones:

   $$r = [(K_1 + K_2)/\Omega] \sin(i),$$

   $$m_2/m_1 = K_1/K_2,$$

   $$(m_1 + m_2) = \Omega^2 r^3/G.$$

   Entonces, dado que $K_1 = 75$ km/sec y $K_2 = 100$ km/sec con $P = 2\pi/\Omega = 11$ días, podemos encontrar la razón m_2/m_1, pero no podemos obtener la masa total $(m_1 + m_2)$ ni la separación orbital r sin saber también la inclinación orbital i.

   Para obtener i, supongamos que el sistema también es una binaria eclipsante con una curva de luz, mostrada en fig3. Discuta el hecho de que el eclipse secundario ocurra exactamente al medio entre eclipses primarios refuerza la deducción de que la órbita es circular y no excéntrica. Muestre que los valles planos de los eclipses (la parte baja de la curva) implican que los eclipses deben ser totales y no parciales. (*Hint*: ¿Por qué los eclipses parciales muestran una variación contínua de luz bloqueada?)

   Dado que la duración de los eclipses es corta comparada al periodo orbital, muestre que el radio R_1 y R_2 de las estrellas debe ser relativamente pequeño comparado con la separación r. De estos dos últimos hechos, discuta que la inclinación i debe ser cercana a 90º.

Asuma ahora que i es igual a 90º y calcule los valores numéricos de m_1, m_2 y r. Exprese su respuesta en $M_\odot$ y $R_\odot$. ¿Cuánto cambiaría su respuesta si $i = 80°$?

También es posible, dados los datos de arriba, calcular el radio de las dos estrellas. Considere la geometría del eclipse, mostrada en fig4, la cual es dibujada desde el punto de vista de la estrella 1 cuando asumimos que i=90º. Discuta que los ángulos θ y θ' están relacionados a los intervalos de tiempo t y t' mostrados en fig3 por las razones:

$$\theta : \theta' : 2\pi = t : t' : P.$$

Dado que R_1 y R_2 son pequeños en comparación con r, muestre que podemos aproximar θ y θ' por las formulas

$$\theta = 2R_2/r,$$

$$\theta' = (2R_1 - 2R_2)/r.$$

Dado que $\theta = 2\pi(t/P)$ y $\theta' = 2\pi(t'/P)$, calcule ahora los radios R_1 y R_2. Exprese su respuesta en $R_\odot$, y verifique que R_1 y R_2 son pequeños en comparación a r. En situaciones reales, los astrónomos tienen métodos más complicados para deducir m_1, m_2, r, i, R_1, R_2 a partir del espectro y la curva de luz, incluso cuando el sistema tiene una órbita excéntrica y una inclinación menos favorable.

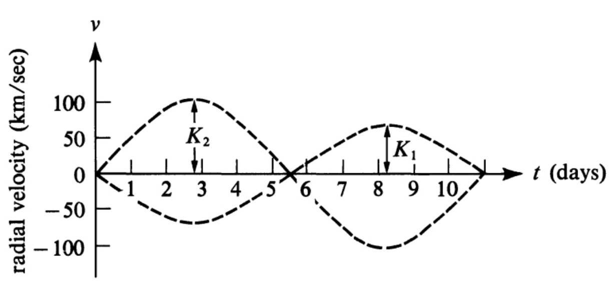

Figura 1

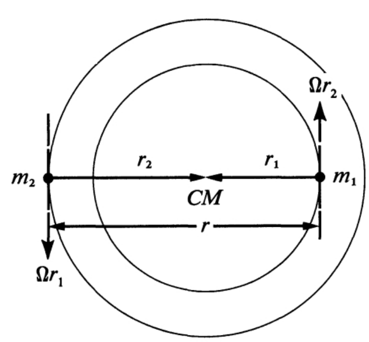

Figura 2

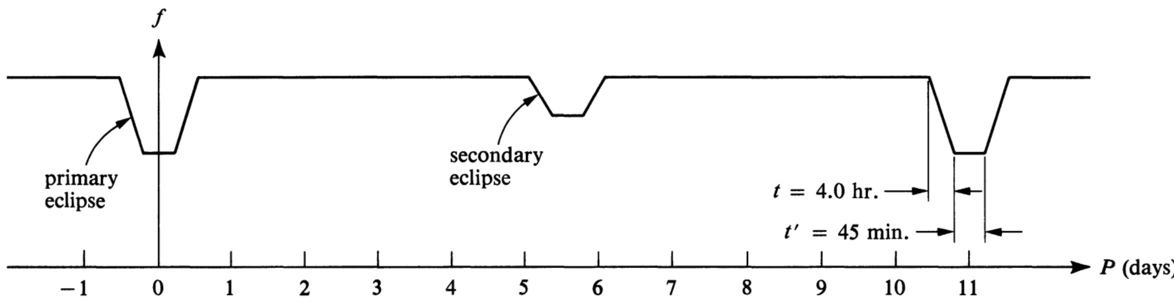

Figura 3

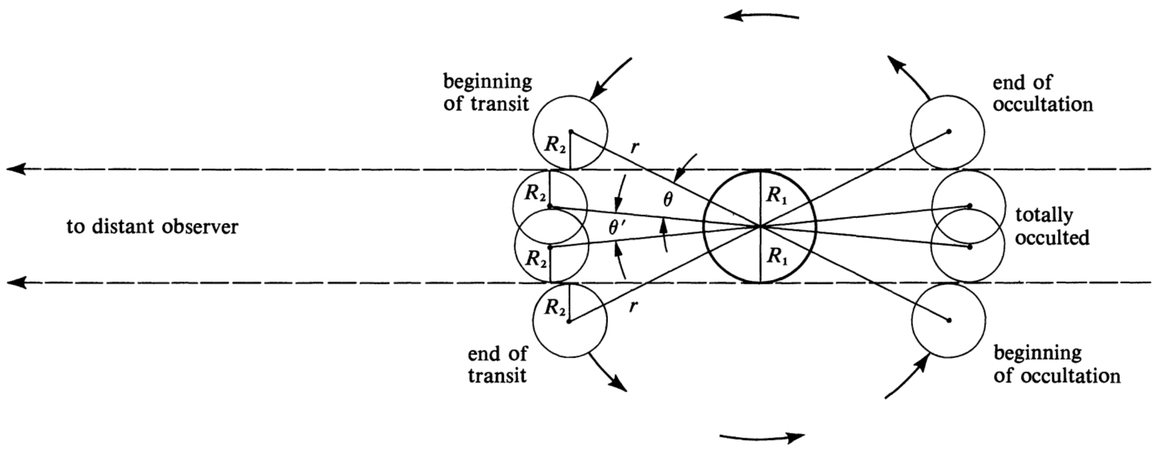

Figura 4

Respuesta

Para que la orbita sea estable, la aceleracion gravitacional de cada estrella debe ser igual a su aceleracion centripeta, por lo que, para cada estrella, tenemos:

$$\frac{Gm_2}{r_2} = r_1\Omega^2 = r\Omega^2 - r_1\Omega^2 \tag{1}$$

$$\frac{Gm_1}{r^2} = r_2\Omega^2 \tag{2}$$

Sustituyendo la ecuacion 2 en la ecuacion 1,

$$\frac{Gm_2}{r_2} = r\Omega^2 - \frac{Gm_1}{r^2}$$

$$\frac{G(m_1+m_2)}{r^3} = \Omega^2 \tag{3}$$

Cuando el plano esta inclinado en un angulo i, la velocidad maxima ocurre cuando el vector de velocidad de m_2 y m_1 son perpendiculares a la linea de los nodos. Cuando esto ocurre, la magnitud del valor de m_1 es $K_1 = r_1\Omega \sin(i)$ y para m_2, $K_2 = r_2\Omega\sin(i)$. Asi, tenemos:

$$r = r_1 + r_2 = \frac{K_1 + K_2}{\Omega \sin(i)}$$

Sustituyendo esto en la ecuacion 3:

$$G(m_1 + m_2)\frac{\Omega^3 \sin^3(i)}{(K_1 + K_2)^3} = \Omega^2$$

$$m_1 + m_2 = \frac{(K_1 + K_2)^3}{G\Omega \sin^3(i)} = \frac{r^3\Omega^2}{G} \tag{4}$$

Recordemos ahora que para un sistema binario se tiene que $m_2/m_1 = r_1/r_2 = K_1/K_2$. Debido a que el eclipse secundario ocurre en medio de los dos eclipses primarios, la orbita debe ser circular. Si fuera excentrica, los intervalos no variarian entre eclipses primarios y secundarios. Esto se puede comprobar con la segunda ley de Kepler, que nos muestra que las estrellas orbitan mas rapido durante ciertas secciones del eclipse (y mas lento en otras). De este modo, cuando las estrellas estan cercanas al centro de masa, sus eclipses estarian cerca el uno del otro (temporalmente), y habria un intervalo mas largo cuando se mueven hacia afuera.

Si el fondo de los transitos es plano (el 'valle' en un plot), entonces sabemos que por alguna cantidad de tiempo (la duracion del valle plano!) una estrella completa cruza sobre la otra, causando una reduccion constante en el flujo de luz. Grazing transits ('transitos de roce'?) aparecen con formas mas o menos triangulares (en el plot de tiempo vs flujo) debido a que el area de la estrella que esta siendo bloqueada esta constantemente cambiando.

Para un sistema binario con mucha separacion entre ellas (comparado con el radio de sus estrellas), un pequeno offset en la inclinacion resultaria en que la binaria no transitaria (visto desde la Tierra). Debido a que sabemos que este es un transito completo (y no grazing) y que la separacion es harta, el sistema debe tener una inclinacion de casi exactamente 90°.

Con todo considerado, se puede calcular

$$m_2/m_1 = 0.75$$

$$\Omega = 2\pi/(11\text{days}) = 6.6 \cdot 10^-6[\text{Hz}]$$

$$r = 2.7 \cdot 10^7[\text{Km}] = 38.8[R_\odot]$$

$$m_1 + m_2 = 1.3 \cdot 10^{31}[\text{Kg}]$$

$$m_1 = 3.7[M_\odot], m_2 = 2.7[M_\odot]$$

Considerando $\sin(80)/\sin(90) = 0.98$, el radio podria haber cambiado por un factor de 0.02. Este ratio se vuelve insignificante para potencias mayores de r, asi que el cambio de masas calculado es negligible.

Dado que el movimiento es circunferencial, la velocidad tangencial es constante, por lo que tenemos que el tiempo τ en el cual la estrella cruza un angulo ψ es $V\tau/r$, con V la velocidad tangencial. Asi que, como θ es el angulo en el cual el transito es parcial, θ' donde es total, y 2π es el periodo completo, podemos concluir que $\theta : \theta' : 2\pi = t : t' : P$. Como r es mucho mayor que R_1 y R_2, en un tiempo t tenemos que $2R_2 \approx r\theta$, la longitud de arco, mientras que la longitud de arco recorrida en tiempo t_0 es $r\theta' \approx 2R_1 - 2R_2$. Condiderando que $\theta = 2\pi(t/P)$ y $\theta' = 2\pi(t'/P)$, tenemos

$$R_2 = r\theta/2 = 1.3 \cdot 10^6[\text{Km}] = 1.85[R_\odot]$$

$$R_1 - R_2 = r\theta'/2 = 240900[\text{Km}]$$

$$R_2 = 1.54 \cdot 10^6[\text{Km}] = 2.21[R_\odot]$$

Con esto confirmamos que la separacion es mucho mayor que el radio, dado que los radios estelares son un orden de magnitud menor que la separacion.

2. **Límite de velocidad** Para una binaria con dos componentes con órbitas circulares, las velocidades son

$$v_1 = \frac{2\pi a_1}{P} : v_2 = \frac{2\pi a_2}{P},$$

para estrellas con masa $m_1 : m_2$, semieje mayor $a_1 : a_2$, respectivamente y periodo orbital P.

I) Muestre que

$$m_1 + m_2 = \frac{P}{2\pi G} \frac{(v_{1,r} + v_{2,r})^3}{\sin^3(i)}$$

donde G es la constante gravitacional e i es la inclinación a nuestra línea de visión. Mencione todas las suposiciones necesarias que haga.

II) Asumamos que la segunda estrella es mucho más pequeña que la primera, por lo que tendremos una binaria espectroscópica de una línea. En este caso, demuestre que la función de masa está dada por

$$\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^3} \sin^3(i) = \frac{P}{2\pi G} v_{1,r}^3$$

III) Con esta función de masa calcule el límite de velocidad de la estrella primaria, si esta estrella es idéntica al Sol, el sistema tiene dos estrellas en la MS, y con óptica adaptable el límite de contraste que tendremos es de 5 magnitudes en la banda visual con una separación máxima de 2 AU.

Respuesta

I) Usando las relaciones de la pregunta anterior, sabemos que $r_1 = a_1$, $r_2 = a_2$, $\Omega = 2\pi/P$, $K_1 = v_{1,r}$, y $K_2 = v_{2,r}$. Podemos reescribir la ecuacion 4 como

$$m_1 + m_2 = \frac{P}{2\pi G} \frac{(v_{1,r} + v_{2,r})^3}{\sin^3(i)},$$

asumiendo orbitas circulares con inclinacion i.

II) Recordando que $m_1/m_2 = a_2/a_1$. Si $m_1 >> m_2$, sabemos que $a_2 >> a_1$. Esto implica que $v_{1,r} >> v_{2,r}$. Con esto en mente, usamos la tercera Ley de Kepler:

$$m_1 + m_2 = \frac{P}{4\pi^3 G}(a_1 + a_2)^3$$

$$m_1 + m_2 = \frac{P}{4\pi^3 G}\left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right)^3 a_1^3$$

$$m_1 + m_2 = \frac{P}{4\pi^3 G}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^3 \left(\frac{v_{1,r}}{\sin(i)}\right)^3$$

$$(m_1 + m_2)\sin^3(i)\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-3} = \frac{P}{4\pi^3 G} v_{1,r}^3$$

$$\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^3}\sin^3(i) = \frac{P}{2\pi G}v_{1,r}^3$$

III) Si la diferencia maxima entre magnitudes es 5, entonces tendremos $-5\log_1 0(F_2/F_1) = 5$, donde F_1 y F_2 son los flujos de las estrellas. Como $L = 4\pi d^2 F$, y d es igual para ambas estrellas (ya que son un sistema binario y equidistantes a la Tierra), tendremos la relacion entre luminosidades $L_2/L_1 = 1/10$. La estrella primaria es identica al sol, por lo que $L_1 = L_\odot$, y tendremos $L_2 > L_\odot/10$.

Finalmente, para estrellas mas pequenas que el sol en la MS, $L_2 = 0.23L_\odot\left(\frac{m_2}{m_\odot}\right)^{2.3}$. Luego encontramos que $m_2 = 0.69m_\odot$. La velocidad maxima de la estrella primaria si es observada con i = 90 deg, es $v_1 = 86$[km / s].

3. **Tiempo en MS**

Compare el tiempo que pasan en la MS estrellas con masas de 1, 2, y $5M_\odot$ y discuta los resultados.

Respuesta El tiempo en la MS es proporcional a M^{-2}, así que la relación entre estrellas de 1, 2, y $5M_\odot$ es 100 : 25 : 4. NANI?! Estrellas mas masivas no duran mas (tienen mas combustible). En proporciones radian mas tambien. Equilibrio hidrostatico y presion de radiacion requieren aun mayor quema de combustible para compensar todo el bodybuilding de esa MASSIVE star (que ocurre con las zonas convecctivas y radiativas??). Bien podrian citar la tarea anterior en esto. El takeaway no tacito de ambas es que a mayor masa que tenga una estrella, menos tiempo se queda en la MS.

En esta comparación, la fuerte dependencia del tiempo en MS con la masa, nos dice que si el sol tuviera el doble de su masa, habría dejado la MS hace 2.3 billones de años. En comparación, las células eucariotas se desarrollaron en la Tierra hace 1.8 billones de años.

RN: Billones US.

4. **Estrella de Helio en la MS**

Para deducir la ubicación aproximada en el diagrama H-R de una estrella de Helio de la MS de $0.5M_\odot$, consideremos que para una estrella químicamente homogenea de baja masa con un interior radiativo, tenemos que la luminosidad L satisface:

$$L \propto RT^{7.5}/\rho^2,$$

con R igual al radio, T el promedio de temperatura interna y ρ la densidad de masa promedio. Si la presión de gas domina, T está relacionado a la presión P y el número de densidad n por la formula

$$T \propto P/n.$$

El número de densidad n y la densidad de masa se relacionan vía $\rho = mn$, donde m es la masa promedio de todas las partículas constituyentes. Sea $X =$ la fracción de masa del hidrógeno $= m_p n_H/\rho$, donde n_H es el número de densidad de un núcleo de hidrógeno, sea $Y =$ la fracción de masa del helio $= 4m_p n_{He}/\rho$, donde n_{He} es el número de densidad de un núcleo de helio. Al interior de la estrella, el hidrógeno y el helio están completamente ionizados, por lo que $n = 2n_H + 3n_{He}$, dado que cada átomo de hidrógeno contribuye con dos partículas (núcleo

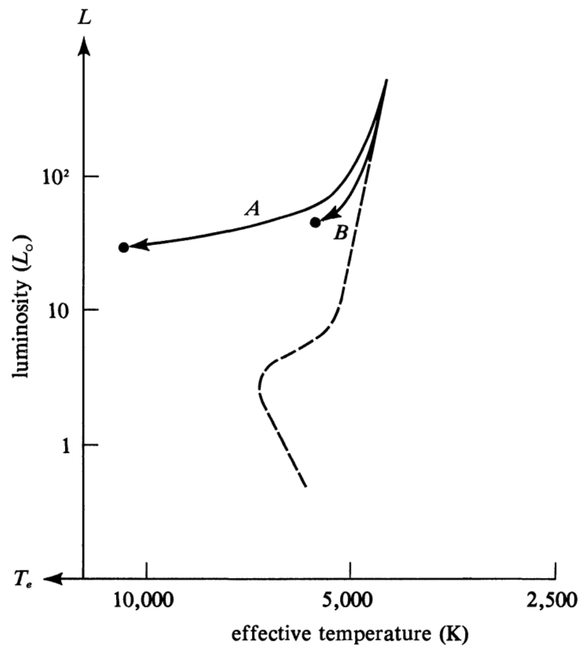

Figura 5: Decent of a low-mass star with poor heavy-element abundances (Population II star) from the tip of the red-giant branch to the horizontal branch. Track A corresponds to a star which suffered a relatively large loss of mass during the red-giant phase of stellar evolution. Track B corresponds to a star which suffered relatively little loss of mass.

y electrón), y cada átomo de He contribuye con 3 partículas (núcleo y dos electrones). Con $Y = 1 - X$ (estrella extrema de Population II que no tiene elementos pesados), muestre que la masa promedio m está dada por

$$m = \frac{4}{5X + 3} m_p.$$

Muestre también que

$$T \propto Mm/R, L \propto m^{7.5} M^{5.5}/R^{0.5} \propto m^7 M^5 T^{0.5}.$$

Suponga que una estrella de MS $1M_\odot$ ($X = 0.75$) tiene una luminosidad $L = 1L_\odot$, con una temperatura central de $1.5 \cdot 10^7$ K (para poder quemar hidrógeno en el núcleo), y con un radio de $1R_\odot$. Muestre que una estrella de He de la MS ($X = 0$) de $0.5M_\odot$ con una temperatura central de $1.0 \cdot 10^8$ K (para poder quemar He en el núcleo) con luminosidad de $24L_\odot$ y con un radio de $0.17R_\odot$. ¿Cuál es la temperatura efectiva de esa estrella? ¿Cómo se comparan estas estimaciones con las figuras 5 y 6?

Respuesta

Usando las relaciones del problema, tenemos:

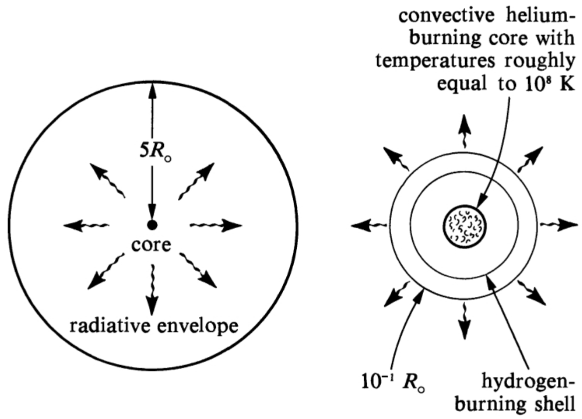

Figura 6: The structure of a horizontal-branch star. The left figure shows the entire star from core to photosphere. The right figure shows an enlarged picture of the region near the core.

$$m = \frac{\rho}{n} = \frac{\rho}{2n_H + 3n_{He}} = \frac{\rho}{2\frac{\rho X}{m_p} + 3\frac{\rho Y}{4m_p}} = \frac{4m_p}{8X + 3Y} = \frac{4m_p}{5X + 3}$$

Sabemos que $P \propto \frac{GM^2}{R^4}$ y $\rho \propto \frac{M}{R^3}$. De esto tenemos que

$$T \propto \frac{P}{n} \propto \frac{P}{\rho} m \propto \frac{Mm}{R}$$

$$L \propto \frac{RT^{7.5}}{\rho^2} \propto R\left(\frac{Mm}{R}\right)^{7.5}\left(\frac{R^3}{M}\right)^2 \propto \frac{m^{7.5}M^{5.5}}{R^{0.5}} \propto m^7 M^5 T^{0.5}$$

Con la ultima proporcionalidad dando $T^{0.5} \propto \frac{m^{0.5}M^{0.5}}{R^{0.5}}$. De esto tenemos la siguiente expresion para una estrella de la MS

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{m}{m_\odot}\right)^7 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^5 \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^{0.5}$$

Now, for a $1M_\odot$ star, we have $m_\odot = \frac{4}{5(0.75)+3}m_p = \frac{16}{27}m_p$. while for a $0.5M_\odot$ star, we have $m_\odot = \frac{4}{3}m_p$. Encontramos que

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{4/3}{16/27}\right)^7 \left(\frac{0.5}{1}\right)^5 \left(\frac{1.0 \cdot 10^8}{1.5 \cdot 10^7}\right)^{0.5}$$

$$L = 23.5L_\odot.$$

Tenemos la siguiente expression para los radios:

$$\frac{R}{R_\odot} = \frac{M}{M_\odot}\frac{m}{m_\odot}\frac{T}{T_\odot}.$$

Nos da $R = 0.17R_{\odot}$. Finalmente, usando la ley de Stefan-Boltzmann,

$$\frac{T_{eff}}{T_{eff,\odot}} = \left(\left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) \left(\frac{R_{\odot}}{R} \right)^2 \right)^{0.5}$$

Y asi $T_{eff} = 44,185$ K.