Tarea 5: Convección y Modelo Estándar

1. **Ciclo CNO y cadenas P-P**

   Describa todas las reacciones importantes en la cadena P-P y en el ciclo CNO.

   Finalmente, calcule la energía liberada en la **primera** reacción de la cadena P-P y en el ciclo CNO en MeV usando las masas nucleares de los reactantes y los productos.

   Respuesta La fusión protón-protón ocurre cuando la energía cinética sobrepasa la repulsión electrostática. Esto ocurre a $T > 4 \cdot 10^6 K$.

1a) Dos protones se juntan

$$^1\mathrm{H} +^1 \mathrm{H} \rightarrow^2 \mathrm{He}$$

1b) a través del decaimiento beta llegan al deuterio.

$$^2\mathrm{He} \rightarrow^2 \mathrm{H} + e^+ + \nu_e$$

2) Esto se combina con otro protón para crear un isótopo de Helio.

$$^2\mathrm{H} +^1 \mathrm{H} \rightarrow^3 \mathrm{He} + \gamma$$

Desde aquí, hay 3 posibilidades:

3a)

$$^3\mathrm{He} +^3 \mathrm{He} \rightarrow^4 \mathrm{He} + 2^1\mathrm{H}$$

3b)

$$^3\mathrm{He} +^4 \mathrm{He} \rightarrow^7 \mathrm{Be} + \gamma$$

Puede terminar aquí al final de PPI o continuar por dos caminos distintos (uno de ellos el PPII).

3b.a1)

$$^7\mathrm{Be} + e^- \rightarrow^7 \mathrm{Li} + \nu_e$$

3b.a2)

$$^7\mathrm{Li} +^1 \mathrm{H} \rightarrow 2^4\mathrm{He}$$

La otra rama, PPIII, es

3b.b1)

$$^7\mathrm{Be} +^1 \mathrm{H} \rightarrow^8 \mathrm{B} + \gamma$$

3b.b2)

$$^8\mathrm{B} \rightarrow^8 \mathrm{Be} + e^+ + \nu_e$$

3b.b3)

$$^8\mathrm{Be} \rightarrow 2^4\mathrm{He}$$

Nótese que los neutrinos producidos a cada paso tienen distintas energías características.

Finalmente, para los cálculos energéticos, la primera reacción es

$$^1\mathrm{H} +^1\mathrm{H} \rightarrow ^2\mathrm{He}$$

La masa del átomo de hidrógeno es $m_{^1H} = 1.00794[AMU]$, mientras que la masa del diprotón es $m_{^2H} = 2.01410[AMU]$. La energía liberada es entonces la diferencia entre reactantes y productos.

$$\Delta m = m_{^2H} - (m_{^1H} + m_{^1H})$$

$$\Delta m = -0.00178[AMU]$$

Con $E = \Delta mc^2$, encontramos $E = -1.86[MeV]$

2. **Modelo Estándar de Eddington** Trataremos de estimar una relación de masa luminosidad investigando los límites de este modelo, es decir como varía la luminosidad en función de la masa.

   Primero, asuma que $1 - \beta = \frac{L}{L_{Edd}}$ es constante en toda la estrella, aplíquelo a la superficie de la estrella para estimar una relación entre M-L (no es necesario resolver cada constante).

   Luego resuelva la ecuación cuártica de Eddington para los límites $1M_\odot$ y $100M_\odot$, calcule β para cada caso, y utilizando la relación del comienzo estime la proporcionalidad entre L y M, para cada caso.

   Respuesta

   Sabemos que

$$1 - \beta = 0.004(\frac{M}{M_\odot})^2(\frac{\mu}{0.61})^4\beta^4$$

.

En el modelo estándar, asumimos que beta es constante a través de la estrella. Si aplicamos esto a la superficie de la estrella, evaluamos $1 - \beta$.

$$L = (1 - \beta)L_{Edd}$$

$$L = \frac{aG^3}{3R^4}\frac{\pi}{(2\xi)_1^4(d\Theta/d\xi)_{\xi_1}^2}\mu^4 M^2\beta^4$$

$$= \frac{\pi^2}{12\xi_1^4(d\Theta/d\xi)_{\xi_1}^2}\frac{acG^4}{R^4\kappa_s}\mu^4\beta^4 M^3$$

$$= 5.5\beta^4(\frac{\mu}{0.61})^4(1cm^2g^{-1}/\kappa_s)(\frac{M}{M_\odot})^3 L_\odot$$

donde κ_s es el valor de κ_R en la superficie estelar.

Alternativamente, se pueden dejar las constantes simplemente expresadas, conservando los M, L y β para ver dependencias. Algo de este estilo: Con $1 - \beta = 0.004(\frac{M}{M_\odot})^2(\frac{\mu}{0.61})^4\beta^4$

y $L_{Edd} = \frac{4\pi GMc}{\kappa}$, reemplazamos en $L = (1-\beta)(L_{Edd}) = (A \cdot \frac{M}{M_\odot}^2 \beta^4)(B \cdot M)$, con A, B constantes, para llegar a $L \sim M^3 \beta^4$) y seguir trabajando con esto, lo que vuelve todas las relaciones de abajo más sencillas, pero dejaré expresadas con más elementos por completitud.

Ésta expresión sería nuestra primera relación teórica de masa-luminosidad.

Ahora, probaremos el comportamiento de esta ecuación en los límites de baja y alta masa. Para estrellas con $\sim 1M_\odot$,

$$1 - \beta = 0.004(\frac{M}{M_\odot})^2(\frac{\mu}{0.61})^4\beta^4$$

deberá ser muy pequeño. Por lo que la solución está cerca de $\beta = 1$. Vemos entonces que

$$L = 5.5 \cdot 1^4(\frac{\mu}{0.61})^4(1cm^2g^{-1}/\kappa_s)(\frac{M}{M_\odot})^3 L_\odot$$

Y por lo tanto, $L \sim M^3$.

Para estrellas muy masivas con $M \sim 100M_\odot$ el coeficiente del termino β^4 es grande. Aproximamos la solución en ese caso, despreciando el termino beta:

$$0.0004(\frac{M}{M_\odot})^2(\frac{\mu}{0.61})^4\beta^4 \approx 1$$

Por lo que $\beta^4 \sim M^{-2}$

Enchufando esto en la relación de masa luminosidad nos da que $L \sim \beta^4 M^3 \sim M$. Por lo tanto esperamos que para estrellas muy masivas esta relación masa luminosidad se debería 'aplanar' y acercarse a $L \sim M$. Esto es asumiendo que κ_s, la opacidad de superficie, es constante, lo que es una aproximación aceptable, pero bien meh, dado que la temperatura de superficie varía mucho entre estrellas de baja y alta masa, y por tanto, la opacidad también varía mucho (recordad los modelos de la p1 de la tarea 4).

Con esto se concluye que para baja masa $L \sim M^3$ (en realidad es más cercano a 3.5), aplanándose a $L \sim M$ para masas elevadas, lo que es lo visto en observaciones reales. Por lo que podríamos decir que este modelo reproduce aproximadamente lo observado.

3. **Convección** Con ayuda de un diagrama, explique el proceso de convección en estrellas, mencionando el criterio de Schwarzschild.

   Además explique la transición de gradiente dominante entre adiabático y radiativo.

   Respuesta

   En estrellas más pequeñas, la opacidad es grande, lo que hace que el gradiente de temperatura sea muy marcado. Si sobrepasa el gradiente adiabático, los fotones no son suficientes para transportar la energía de manera estable. Las regiones más calientes del gas subirán, dónde se expandirán y enfriarán, causando que vuelvan a bajar.

   En estrellas masivas donde el ciclo CNO o la reacción triple alfa dominan, la 'velocidad' de generación de energía en el núcleo será altamente dependiente de la Temperatura. Más cerca del centro, hay un gradiente mayor de temperatura, causando convección en esta zona.

   El criterio de Schwarzschild es

$$-\frac{dT}{dr} < \frac{g}{c}$$

donde c es la capacidad calórica a presión constante. Esto dicta que bajo convección, si un elemento del gas se hundirá o levantará si es desplazado.

4. **Modelos politrópicos**

Empezando con la ecuación de Lane-Emden,

$$\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{d\omega}{dz}\right)+\omega^n=0$$

$$\alpha=\left[\frac{n+1}{4\pi G}k\rho^{-\frac{n-1}{n}}\right]^{1/2}.$$

muestre que la distribución de la masa en una estrella politrópica es

$$m(z)=-4\pi\alpha^3\rho_c z^2\frac{d\omega}{dz},$$

con z como radio adimensional, ρ_c la densidad central y α dependiendo del índice de politropicidad (politropismo?) n, la presión central, y constante k. **Hint:** Integrando la eq de continuidad se obtiene la masa estelar.

Respuesta

Integrando la ecuación de continuidad nos da la masa estelar:

$$\frac{dm}{dr}=4\pi r^2\rho,$$

$$m(r)=\int_0^R 4\pi r^2\rho dr,$$

que convertimos en coordenadas adimensionales

$$m(z)=\int_0^{z_1}4\pi(\alpha z)^2\rho d(z\alpha),$$

$$m(z)=\int_0^{z_1}4\pi\alpha^3z^2\rho_c\omega^n dz,$$

$$m(z)=4\pi\alpha^3\rho_c\int_0^{z_1}z^2\omega^n dz.$$

Con sus arreglines a la eq de Lane-Emden,

$$\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{d\omega}{dz}\right)=-\omega^n$$

$$-z^2\omega^n=\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{d\omega}{dz}\right).$$

Usando ésto, tenemos

$$m(z) = 4\pi\alpha^3\rho_c \int_0^{z_1} -\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{d\omega}{dz}\right) dz.$$

Luego, cancelando la integral y la derivada, llegamos a

$$m(z) = -4\pi\alpha^3\rho_c z^2\frac{d\omega}{dz}.$$