Tarea 4: Reacciones Nucleares y Zona Radiativa

1. **Transporte de Energía**

   Dibuje y describa el transporte de energía dentro de una estrella para los rangos de masa $M < 0.5M_\odot$, $0.5 - 1.5M_\odot$ y $M > 1.5M_\odot$.

   Respuesta

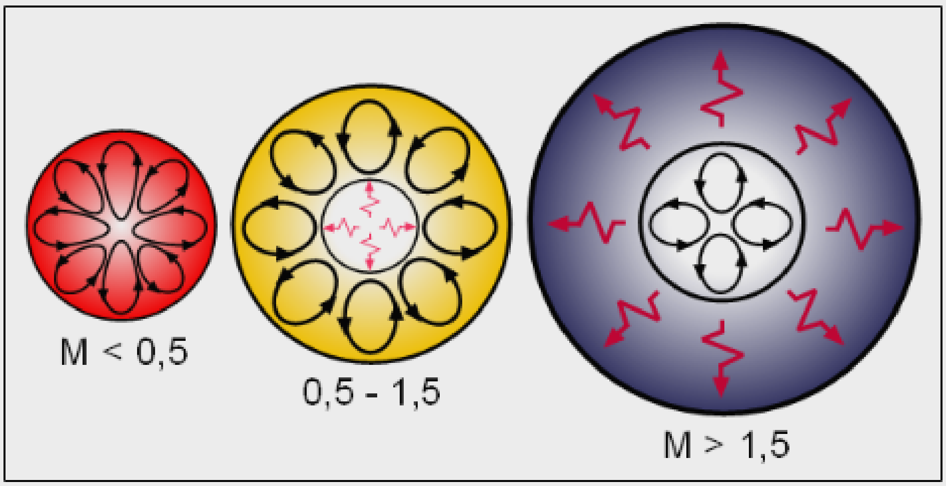

Figura 1: Tipos de Transporte

   Para el caso $M < 0.5M_\odot$ tendremos que la estrella es completamente convectiva. Esto es debido a que, por la baja T, su opacidad aumenta, siendo absorbidos los fotones generados en el interior.

   Para el caso $0.5M_\odot < M < 1.5M_\odot$, el centro se vuelve radiativo (capas exteriores siguen siendo convectivas). Al aumentar la temperatura al interior, se crea una zona menos opaca donde hay transporte radiativo. A mayor masa, aumenta el tamaño de esta zona.

   Para el caso $M > 1.5M_\odot$ tendremos que se invierten las capas, siendo el interior convectivo y el exterior radiativo. En este límite la estrella fusiona H a partir del ciclo CNO, el cual se vuelve dominante (por sobre la CPP), generando una zona convectiva en el núcleo (debido al aumento de producción de energía) y manteniendo un exterior radiativo.

2. **Probabilidad de efecto túnel** Dado que la probabilidad de la penetracidón de Gamow es proporcional a $\exp\left((-]piZ_iZ_je^2)/\varepsilon_0h\nu\right)$ (donde Z_i y Z_j son la carga para las partículas i y j, ε_0 es la permitividad del vacío, h la constante de Planck, y ν es la velocidad relativa de las partículas), y la distribución de energía cinética de las partículas sigue una distribución de Maxwell-Boltzmann ($\propto \exp\left((-m_gv^2)/2kT\right)$, donde m_g es la masa reducida, v es la velocidad de las partículas, k es la constante de boltzmann, y T es la temperatura del sistema. Con

ayuda de un diagrama, muestre que el producto de dos relaciones significa que hay un peak en la distribución de la probabilidad de efecto túnel como función de la energía.

Respuesta

Las probabilidades son

$$P_g(E) \propto e^{\frac{-\pi Z_i Z_j e^2}{\varepsilon_0 h\nu}}$$

$$P_{KE} \propto e^{\frac{-m_g v^2}{2kT}}$$

Multiplicándolas obtenemos

$$P_g(E), P_{KE} \propto \exp\left(\frac{-\pi Z_i Z_j e^2}{\varepsilon_0 h\nu} - \frac{m_g v^2}{2kT}\right)$$

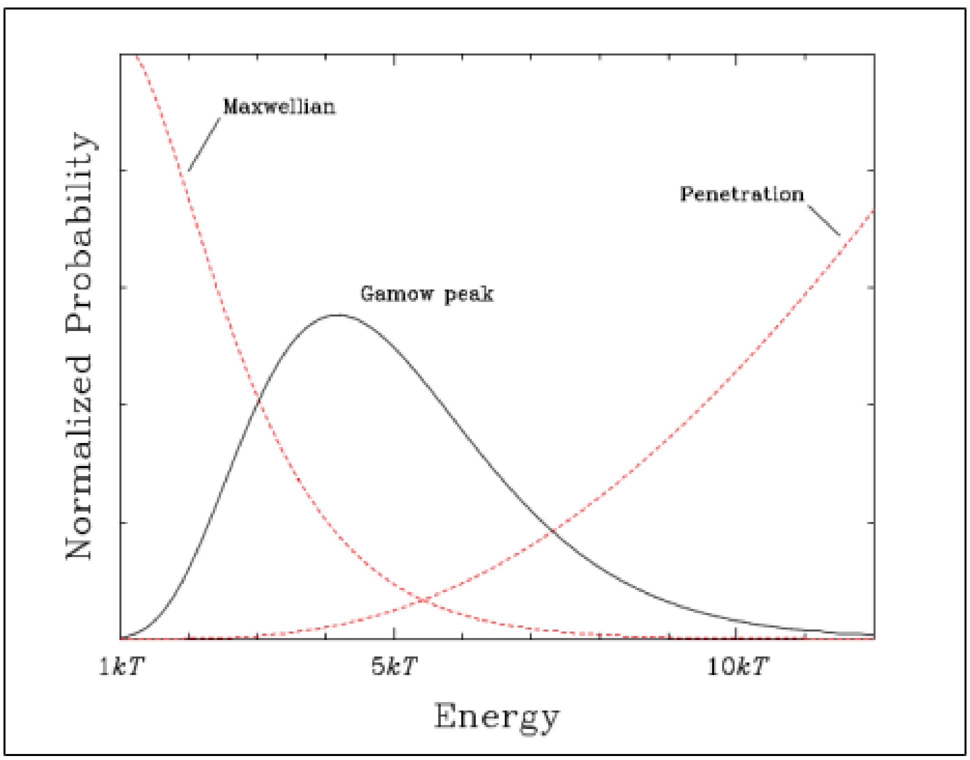

Figura 2: Peak de Gamow

Ésta es la probabilidad para que dos partículas a temperatura T 'tuneleen' a través de la barrera de Coulomb. Como el diagrama muestra, efectivamente hay un peak en esta distribución.

3. **Luminosidad de Eddington**

Si la fuerza de gravedad para un volumen pequeño de gas con masa m que está ubicado a una distancia R de una fuente de radiación con masa M, está dada por $F_g = GMm/R^2$, y la presión de radiación a distancia R es $P_r = L/4\pi R^2 c$, donde L es la luminosidad de la fuente, muestre que para estrellas de baja masa, la luminosidad de Eddington está dada por $L_{edd} = 4\pi GMcT^{7/2}/\rho$, donde T y ρ son la temperatura y la densidad de materia.

Finalmente, calcule la luminosidad de Eddington con esta aproximación para una estrella de una masa solar y para una de media masa solar. Comente los resultados.

Respuesta

Primero, sabemos que la presión es la fuerza por unidad de área, $P = F/A$, la opacidad es una sección transversal divididad por masa, $\kappa = \sigma_T/m_p$, y area puede ser escrito como opacidad por masa $A = \kappa m$. Utilizando esto, encontramos la relación $F/m = P/\kappa$.

Usando esta relación para la eq de gravedad

$$\frac{GM}{R^2} = \frac{\kappa L}{4\pi R^2 c}$$

y resolviendo para luminosidad

$$L = \frac{GM 4\pi c}{\kappa}$$

De la ley de opacidad de Kramer, sabemos que $\kappa \propto \rho T^{-7/2}$, utilizando esto llegamos a

$$L \propto \frac{4\pi c GMT^{7/2}}{\rho}$$

Esto asume que la energía es sólo transportada por fotones. Sin embargo, no son suficientemente eficientes en estrellas masivas, por lo que se convierten en convectivas en vez de conductivas. Estrellas ligeramente más grandes que el Sol tienen núcleos convectivos. Podemos utilizar esto para encontrar la masa máxima de una estrella ($100M_\odot$). Más allá de este límite, colapsarán en agujeros negros.

Finalmente, en la parte de enchufar números,

$$L = \frac{4\pi(3\cdot 10^{10})(6.7\cdot 10^{-8})MT^{7/2}}{1.408} = (1.8\cdot 10^4)MT^{7/2}$$

Por lo que para $1M_\odot$, la temperatura será alrededor de $5700K$, dando L_{edd} $5\cdot 10^{50}$ ergs por segundo. Para $0.5M_\odot$, la temperatura será T $3300K$ y nos da $4\cdot 10^{49}$ ergs por segundo. De ésto vemos que la Luminosidad de Eddington para el sol es cerca de un orden de magnitud mayor que para una estrella de la mitad de su masa.

4. **Presión Central**

Empezando desde el equilibrio hidrostático, muestre que el mínimo de la presión central es

$$P_c > \frac{1}{8\pi}\frac{GM^2}{R^4}.$$

Hint: Combine la eq. de equilibrio hidrostático con la ecuación de continuidad

$$\frac{dP}{dr} = -\rho\frac{Gm}{r^2} \tag{1}$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \tag{2}$$

<u>**Respuesta**</u>

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{dm}\frac{dm}{dr},$$

$$-\rho\frac{Gm}{r^2} = \frac{dP}{dm}4\pi r^2 \rho.$$

Resolviendo para dP,

$$dP = -\rho\frac{Gmdm}{4\pi r^4 \rho}.$$

Integrando la presión de la superficie en el centro nos da la presión central

$$P_c = -\int_M^0 \frac{Gmdm}{4\pi r^4},$$

o

$$P_c = \int_0^M \frac{Gmdm}{4\pi r^4}.$$

Esto debe ser mayor que la presión en la superficie.

$$P_c > \int_0^M \frac{GMdm}{4\pi R^4}.$$

Resolviendo la integral

$$P_c > \frac{1}{2}\frac{GM^2}{4\pi R^4}.$$