

MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre Primavera 2019

Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Emilio Molina, Rolando Rogers

Liberación óptima de mosquitos

Descripción: El objetivo de este proyecto es estudiar el control de enfermedades transmitidas por mosquitos mediante el reemplazo de población. El método que consideramos es la liberación de mosquitos infectados por una bacteria, la cual impide que los insectos transmitan virus como el dengue. Para ello se debe describir y resolver un problema de control óptimo, obteniéndose una política óptima de liberación de mosquitos infectados.

Introducción: El dengue es una enfermedad de origen viral que produce síntomas gripales, llegando, en algunos casos a una complicación denominada como dengue hemorrágico. El vector más común para la propagación de esta enfermedad es el *Aedes aegypti*, mosquito que vive en zonas tropicales y subtropicales de todo el mundo. En la actualidad, el dengue ha afectado de manera endémica a más de 100 países y, actualmente, no hay un tratamiento que garantice un correcto tratamiento. Por esto, es necesario buscar una forma de controlar la propagación de esta enfermedad, ya sea mediante prevención de picaduras o, directamente, mediante el control de la población de mosquitos. Es esta última estrategia que proponemos estudiar en este proyecto.



Figure 1: *Aedes aegypti*

Una de las formas más innovadoras de control de mosquitos es la introducción artificial de una bacteria del género *Wolbachia* en la población de mosquitos. Este control se basa en la *interferencia de los patógenos* (IP) de *Wolbachia* con el virus del dengue en los mosquitos *Aedes*, lo que significa que un mosquito infectado con *Wolbachia* no puede transmitir el dengue.

Además, se puede aprovechar de un fenómeno llamado *incompatibilidad citoplásmica* (IC) : si un mosquito macho infectado con *Wolbachia* se aparea con una hembra no infectada, los embriones mueren temprano en el desarrollo. Sin embargo, una hembra infectada puede aparearse con un macho, infectado o no infectado, produciendo huevos sin problemas, y la descendencia estará infectada. Esto resulta en una ventaja reproductiva para las hembras infectadas.

Para lograr el reemplazo de población, el principio es liberar mosquitos infectados con *Wolbachia*. Una vez liberados, se reproducen con mosquitos silvestres y si las liberaciones son suficientemente largas, con tiempo se puede esperar que la mayoría de los mosquitos lleven *Wolbachia*, gracias a la IC. Debido a la IP, la población de mosquitos tiene una menor competencia para transmitir enfermedades, lo que disminuye el riesgo de brotes de dengue.

Matemáticamente, se puede modelar la dinámica de las densidades de población de mosquitos no infectados n_s y infectados n_i mediante el siguiente sistema competitivo ([1, 2, 3]):

$$\begin{aligned}\dot{n}_s(t) &= f_s(n_s(t), n_i(t)) \\ \dot{n}_i(t) &= f_i(n_s(t), n_i(t)) + u(t)\end{aligned}$$

donde $u(\cdot)$ es el control, que representa la liberación de mosquitos infectados. Las funciones $f_s(n_s, n_i)$ y $f_i(n_s, n_i)$ son definidas por

$$\begin{aligned} f_s(n_s, n_i) &= b_s n_s \left(1 - s_h \frac{n_i}{n_s + n_i}\right) \left(1 - \frac{n_s + n_i}{K}\right) - d_s n_s \\ f_i(n_s, n_i) &= b_i n_i \left(1 - \frac{n_s + n_i}{K}\right) - d_i n_i \end{aligned}$$

con b_s, b_i las tasas de nacimiento, d_s, d_i las tasas de mortalidad, K la capacidad de carga del medio ambiente y s_h es la tasa de IC.

La idea del proyecto es plantear y resolver un problema de control óptimo que trata de encontrar la liberación de mosquitos infectados que maximiza el reemplazo de población [4]. Una opción es, por ejemplo, considerar

$$\min_u J(u) := n_s(T)^2 + \max(n_{I*} - n_i(T), 0)$$

donde T es el tiempo final y n_{I*} es la cantidad al equilibrio de la población infectada.

Objetivos: La idea es utilizar las herramientas teóricas y numéricas de control óptimo estudiadas en el curso para analizar este problema. **Se le otorga cierta libertad a la hora de plantear el problema y en el formato del informe. Sin embargo, debe guiarse por la pauta siguiente que entrega los criterios mínimos a ser evaluados.**

- Estudiar los equilibrios de las dinámicas planteadas.
- Plantear el problema de liberación óptima de mosquitos infectados como un problema de control óptimo. Plantee más de una función objetivo.
- Estudiar distintas estrategias de liberación mediante herramientas de control óptimo. Resolver analíticamente si es posible o numéricamente con el Principio de Pontryaguin. Resolver también usando BOCOP y comparar.
- Establecer las funciones valor del problema planteado y resolver numéricamente usando Hamilton-Jacobi-Bellman.

References

- [1] J. Z. Farkas and P. Hinow. Structured and Unstructured Continuous Models for Wolbachia Infections. Bulletin of Mathematical Biology, 72(8):2067–2088, Nov 2010.
- [2] A. Fenton, K. N. Johnson, J. C. Brownlie, and G. D. D. Hurst. Solving the Wolbachia paradox: modeling the tripartite interaction between host, Wolbachia, and a natural enemy. The American Naturalist, 178:333–342, 2011.
- [3] D. E. Campo-Duarte, D. Cardona-Salgado, and O. Vasilieva. Establishing wMelPop Wolbachia infection among wild Aedes aegypti females by optimal control approach. Appl. Math. Inf. Sci. 1, pages 1–17, (2017).
- [4] Luís Almeida, Yannick Privat, Martin Strugarek, Nicolas Vauchelet. Optimal releases for population replacement strategies, application to Wolbachia. 2018. <hal-01807624>