

EJERCICIO 2

Sea P una matriz de transición sobre el conjunto finito o numerable E , satisfaciendo la *condición de Doeblin*:

$$\exists \bar{\nu} \in \mathcal{P}(E), \exists \bar{n} \in \mathbb{N}, \exists \beta > 0, \quad (P^{\bar{n}})_{xy} \geq \beta \bar{\nu}_y, \quad \forall x, y \in E. \quad (D)$$

Queremos probar que existe un estado $\bar{x} \in E$ tal que cualquier P -CMH visita infinitas veces a \bar{x} con probabilidad 1, partiendo de cualquier distribución inicial. Para esto, siga los siguientes pasos.

1. Sea $\bar{x} \in E$ tal que $\bar{\nu}_{\bar{x}} > 0$, y sea $\alpha = \beta \bar{\nu}_{\bar{x}} > 0$. Supongamos $\bar{n} = 1$. Sean $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ variables uniformes en $[0, 1]$, y $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ variables Bernoulli de parámetro α , todas independientes. Definimos el proceso (X_n) recursivamente:

$$X_{n+1} = \xi_n \bar{x} + (1 - \xi_n) f(X_n, U_n),$$

donde $f : E \times [0, 1] \rightarrow E$ es una función de transición de la matriz $Q_{xy} = \frac{1}{1-\alpha}(P_{xy} - \alpha \mathbf{1}_{\{y=\bar{x}\}})$. Muestre que la matriz de transición de (X_n) es P (asuma que es una CMH).

2. Concluya lo deseado en el caso $\bar{n} = 1$.
3. Explique sin hacer los detalles cómo extender el argumento anterior al caso $\bar{n} \in \mathbb{N}$ general.

LABORATORIO 2: REDUCCIÓN DE VARIANZA Y CADENAS DE MARKOV

I. Reducción de varianza. Considere la cantidad

$$\alpha = \mathbb{E}[e^{bZ} \mathbf{1}_{Z>0}], \quad (1)$$

donde Z es una variable normal estándar y $b \in \mathbb{R}$ es una constante. Supondremos para este problema que la normal estándar es la única variable eficientemente simulable. Se desea aproximar α mediante un algoritmo de Monte Carlo con baja varianza.

1. Proponga un método de muestreo preferencial.
2. Sabiendo que $\mathbb{E} \exp(bZ) = \exp(b^2/2)$, proponga un método de variable de control.
3. Mejore el método del ítem anterior usando una variable antitética.

Disponemos entonces de cuatro métodos de Monte Carlo para aproximar α : usando (1) directamente, y los tres métodos anteriores propuestos por usted. En lo que sigue, trabaje con $b = 2$.

4. Aproxime numéricamente la raíz de la varianza de la variable aleatoria que da lugar a cada uno de los cuatro métodos, para distintos tamaños de muestras, y grafique. Obtenga una estimación de la raíz de la varianza en cada caso.
5. Usando la estimación de la raíz de la varianza del punto previo y aproximando con el TCL, calcule el tamaño de muestra necesario para cada método de modo de que el error obtenido sea inferior a $\varepsilon = 0,02$ con probabilidad de 95%. Comente.
6. Sea N_{\max} el tamaño de muestra máximo entre los calculados en el ítem anterior para los tres métodos propuestos por usted (es decir, excluyendo el método que usa (1) directamente). Para distintos tamaños de muestra crecientes hasta N_{\max} , obtenga la estimación de α de cada uno de los cuatro métodos y grafique.
7. En base a lo obtenido en los puntos previos, ¿cuál método es el mejor y cuál el peor? Obtenga el valor exacto de α usando una herramienta adecuada (por ejemplo: www.wolframalpha.com), y compare con el valor entregado por los cuatro métodos, usando el mismo N_{\max} para todos. Comente.

II. Simulación de una cadena de Markov. En esta parte considere el conjunto de estados $E = \{1, \dots, N\}$, para un cierto $N \in \mathbb{N}$ dado.

1. Sea X_0 una v.a. con ley μ y $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una colección de v.a.'s i.i.d. uniformes en $[0, 1]$, independientes de X_0 . Sea $f : E \times [0, 1] \rightarrow E$ una función medible. Para $n \geq 0$ se define por recurrencia la sucesión aleatoria

$$X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1}).$$

Pruebe que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una cadena de Markov homogénea y explicita su matriz de transición.

2. Muestre que si f es tal que $P_{xy} = \mathbb{P}(f(x, U) = y)$ para todo $x, y \in E$, donde $U \sim \text{unif}(0, 1)$, entonces $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida anteriormente es una cadena de Markov con distribución inicial μ y matriz de transición P . En tal caso, vamos a llamar a f la *función de transición* asociada a la matriz P .
3. Muestre que $f(x, u) = \inf\{y \in E : \sum_{z=1}^y P_{xz} \geq u\}$ cumple la condición anterior.
4. Utilizando lo anterior, programe un método `CMH(mu, P, n)` que simule n pasos de la cadena de Markov homogénea con matriz de transición P y distribución inicial μ .
5. Para un caso particular interesante escogido por usted, utilice el método programado y grafique los resultados obtenidos.

III. Aplicación a un modelo de colas. Considere una cola a tiempo discreto a la que, en cada instante $n \in \mathbb{N}$ llega un cliente con probabilidad $p \in (0, 1)$ y no llegan clientes con probabilidad $1 - p$. Durante cada intervalo de tiempo en que hay al menos un cliente en la cola, un cliente es atendido y sale de la cola con probabilidad $q \in (0, 1)$ y no se va ningún cliente con probabilidad $1 - q$. Denote por X_n la cantidad de clientes en la cola en el instante n .

1. Escriba X_n como $X_n = f(X_{n-1}, Y_n, Z_n)$ explícitamente en términos de v.a.'s (Y_n) Bernoulli(p) y (Z_n) Bernoulli(q) independientes. Justifique que (X_n) es irreducible. Se puede probar que para $p > q$, la cadena (X_n) diverge c.s. Además, en el caso $p = q$ la medida $(1 - p, 1, 1, \dots)$ es invariante, y para $p < q$ lo es la medida

$$\pi_0 = \frac{q - p}{q}, \quad \pi_x = \left(\frac{p(1 - q)}{q(1 - p)} \right)^x \frac{q - p}{q(1 - q)}, \quad x \geq 1.$$

2. Encuentre el rango de parámetros para los que (X_n) es recurrente positiva, recurrente nula o transiente.
3. En lo que sigue se considerará una versión “truncada” (y simulable) de la cadena. Para ello, se fijará N un número máximo de clientes que la cola permite, y se modifica la matriz de transición con la convención de que si ya hay N clientes, un nuevo cliente simplemente no se queda, pero la dinámica de los que ya están es la misma de antes. Simule y grafique trayectorias de (X_n) hasta $n = 1000$ para 3 pares de valores representativos de (p, q) , fijando en cada caso valores convenientes de N que deberá determinar.
4. Para un par p, q tal que $p < q$ y un valor N fijos que usted determine, compare las siguientes 3 estrategias para estimar numéricamente la distribución invariante π^N asociada:

- Simular K (grande) CM independientes en un tiempo T (grande) y obtener el histograma correspondiente a la *medida empírica* para las K trayectorias en ese tiempo.
- Simular una CM por un tiempo T (grande) y obtener el histograma de las *medias ergódicas*

$$\frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \mathbf{1}_{\{X_k=i\}}, \quad i \in \{0, \dots, N\}.$$

- Simular K (grande) CM independientes en equilibrio mediante simulación perfecta y considerar el histograma correspondiente a la *medida empírica* para los K valores.

En todos los casos, puede fijar K y/o T en términos de la cantidad de uniformes a simular o según un cierto error. Compare los métodos en distancia en variación total a π , y haga un análisis completo de las distintas estrategias. La distancia en variación total entre μ, ν se define como

$$\text{TV}(\mu, \nu) = \inf_{\text{couplings}} \mathbb{P}(X \neq Y) = \frac{1}{2} \|\mu - \nu\|_1.$$