MA4006. Combinatoria. 2019.
Profesor: José Soto.

Tarea 3 versión 2

Fecha límite entrega: 1 de Octubre, 23:59.

Debe entregarse en PDF (si escanea o fotografía sus soluciones, asegúrese de que sea legible).
Cada hora de atraso descuenta 10 puntos de su puntaje. Puntaje mínimo: $M = 30$
La nota del control 2 se calculará como sigue, donde C_i es el puntaje calculado de cada tarea.

$$N = \begin{cases} \text{mín}(C_1, C_2, C_3) & \text{si mín}(C_1, C_2, C_3) \leq M, \\ \text{mín}(70, \frac{C_1+C_2+C_3}{3}) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Cíñase a la política de honestidad y colaboración del curso (LÉALA en el archivo admin.pdf en ucursos). Si colabora con alguien en un problema específico debe indicarlo, **dándole crédito** a la o las otras personas con las que discutió. Si no colabora con nadie en un problema, escriba la frase sin colaboración.

Ejercicio 1. Use el PIE para demostrar que para todo $n, s \in \mathbb{N}$, el número de soluciones enteras de

$$\sum_{j=1}^{n} x_i = k, \quad 0 \leq x_i \leq s-1, \forall i \in [n] \qquad \text{es} \qquad \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \text{wcom}(k - js, n).$$

Deduzca fórmulas simples (que no involucren sumas) para las expresiones siguientes

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{n+k-j-1}{k-j},$$
$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{n+k-2j-1}{k-2j},$$
$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{n(1-j)+k-1}{k-nj}.$$

Ejercicio 2. Al principio de una fiesta, n personas entregan un sombrero y un paraguas a un guardarropas. Al final de la fiesta cada persona recibe un sombrero al azar y un paraguas al azar. ¿Cuál es la probabilidad que todos los sombreros y todos los paraguas terminen en manos equivocadas?.

Ejercicio 3. Sea n un número par. Para todo subconjunto $X \subseteq [n]$, llame $w(X) = \sum_{j \in X} j$ a la suma de los elementos de X. Demuestre, usando DIE que

$$\sum_{X \in \binom{[n]}{k}} (-1)^{w(X)} w(X) = [\![k \text{ par}]\!] \binom{n/2}{k/2} (-1)^{k/2}$$

Ejercicio 4. Use la recurrencia

$$\forall n, k \geq 1: \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

para calcular el valor de $\left[{n+1 \atop 2}\right]/H_n$, donde $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ es el n-ésimo número armónico, para valores pequeños de n y luego sugiera una fórmula general (escriba su razonamiento).

¿Puede dar una demostración combinatorial directa que $\left[{n+1 \atop 2}\right]/H_n$ es el valor que obtuvo?
Indicación: ¿De cuantas formas puede escoger el ciclo que contiene a 1? ¿y el otro?

Ejercicio 5. Demuestre el Nullstellensatz combinatorial siguiente.

Proposición (Nullstellensatz combinatorial)**.** *Sea $P(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{K}[x_1, \dots, x_k]$ un polinomio multivariado sobre un cuerpo arbitrario $\mathcal{K}$, de grado $t \geq 0$ (es decir, P no es el polinomio 0).*

Suponga que $x^\alpha = \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i}$ es un monomio de grado t tal que $[x^\alpha]P(x) \neq 0$. Si $S_1, \dots, S_k$ son conjuntos de $\mathcal{K}$ con $|S_i| > \alpha_i$, entonces deben existir $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \dots s_k \in S_k$ con

$$P(s_1, \dots, s_k) \neq 0$$

Indicación: Use inducción en $t = \deg(P) \geq 1$. Para el paso inductivo, por contradicción y sin pérdida de generalidad, suponga que $P(x) = 0$ en $\prod_i S_i$, con $|S_1| \geq 1$. Para $a_1 \in S_1$ use división larga de polinomios para escribir $P = (x_1 - a)Q + R$ en $\mathcal{K}[x_1, \dots, x_k]$ y luego interprete la identidad como una igualdad de polinomios en $(\mathcal{K}[x_2, \dots, x_k])[x_1]$ (es decir, polinomios univariados en variable x_1 con coeficientes en el anillo $(\mathcal{K}[x_2, \dots, x_k])$).

Ejercicio 6. Deduzca, a partir de la fórmula de Vandermonde, y del Nullstellensatz combinatorial, las siguientes versiones del teorema del Binomio en $\mathbb{C}[x, y]$. Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}.$$

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}.$$

Ejercicio 7. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon < 1$

$$(n-1+\varepsilon)^{\underline{2n}} = (n-\varepsilon)^{\underline{2n}} = (n-1+\varepsilon)^{\underline{n}}(n-\varepsilon)^{\underline{n}}(-1)^n$$

Pruebe además que

$$\binom{\frac{3n-1}{3}}{2n}(-27)^n = \binom{3n}{n}$$

$$\binom{\frac{2n-1}{2}}{n}4^n = \binom{2n}{n}.$$

Use lo anterior para probar que

$$\sum_{k=0}^{2n} {2n \brack k} (1/3-n)^k = \binom{3n}{n} \frac{(2n)!}{(-27)^n} = \sum_{k=0}^{2n} {2n \brack k} (2/3-n)^k$$

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{2n} {2n \brack k} (1/2-n)^k = \frac{n!n!}{16^n} \binom{2n}{n}^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} {n \brack k} (1/2-n)^k \right)^2$$

Ejercicio 8. El **problema de los billetes de Sylvester** consiste en estudiar las cantidades que no pueden "pagarse" con billetes de p pesos y billetes de q pesos, donde p y q son coprimos. Sea $A(p, q)$ el conjunto de combinaciones lineales de p y q con coeficientes naturales, es decir, las cantidades que si se pueden pagar con p y q:

$$A(p, q) = \{ip + jq \colon i, j \in \mathbb{N}\}$$

Como p y q no tienen divisores en común se puede probar (no lo haga) que $A(p, q)$ se particiona como $A(p, q) = \bigcup_{i=0}^{q-1} A_i(p, q)$, donde

$$A_i(p, q) = \{ip + jq \colon j \in \mathbb{N}\}, \qquad \forall 0 \leq i \leq q-1.$$

(a) Sea f la secuencia indicatriz de $A(p, q)$, es decir $f_n = [\![n \in A(p, q)]\!]$. Usando la partición propuesta pruebe que la FGO de f es

$$F(x) = \frac{1 - x^{pq}}{(1-x^p)(1-x^q)}.$$

(b) Sea $G(x) = 1/(1-x)$ la FGO de la secuencia indicatriz de todos los naturales. La serie $H(x) = G(x) - F(x)$ es entonces igual a la FGO de la secuencia indicatriz de los valores que NO se pueden pagar con billetes de p y q unidades. Suponiendo que esta cantidad es finita, es decir, que $H(x)$ es un polinomio, pruebe que el valor más grande fuera de $A(p,q)$ es $pq - p - q$.

(c) Usando que $H(x)$ es un polinomio a coeficientes 0 y 1. Encuentre la cantidad de números naturales que no pertenecen a $A(p,q)$.
Indicación: Evalúe H en un punto x adecuado.

Ejercicio 9. Pruebe las siguientes identidades igualando coeficientes en polinomios/series adecuados para $n, m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. (**Indicación:** Estudie $(1 - a^2x^2)^m$)

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{n}{k} \binom{n}{2m+1-k} (-\lambda)^{2m+1} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{2m} \binom{n}{k} \binom{n}{2m-k} (-\lambda)^{2m} = \binom{n}{m} (-\lambda^2)^m.$$

Además, demuestre que:

$$\sum_{(a,b,c) \in \text{wcom}(n,3)} \binom{n}{a,b,c} (-1)^a = 1.$$

$$\sum_{(a,b,c,d) \in \text{wcom}(n,4)} \binom{n}{a,b,c,d} (-1)^{a+c} = [\![n = 0]\!].$$

Ejercicio 10. (i) El nuevo director del DIM quiere cambiar el semestre académico (de n días) imponiendo una primera parte de ramos solo teóricos (de $1 \leq k \leq n-2$ días, donde k no está fijo) y una segunda parte (de $n-k$ días) de ramos solo prácticos. Además, en la primera parte se debe fijar un día especial sin clases (cualquiera), y en la segunda parte se deben fijar dos días que serán usados para presentaciones (cualquiera). Llame f_n al número de formas en que se puede planear el semestre y note que $f_n = \sum_{k=1}^{n-2} k \binom{n-k}{2}$. Encuentre, usando convoluciones o funciones generatrices una forma cerrada para f_n.

(ii) ¿Qué tal si ahora el nuevo director decide separar el semestre de n días en 2 partes, luego elegir un número arbitrario de días sin clases en la primera parte y luego un número impar de días de presentaciones en la segunda parte? ¿De cuántas formas g_n puede ahora planear el semestre?