MA4006-1 Combinatoria
Profesor: José Soto
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vsalinas@dim.uchile.cl

Auxiliar 7

06 de Septiembre de 2019

P1. Pruebe usando las identidades que:

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} 2^k = \sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{s(n.k)}{2} = \frac{n!}{4^n} \binom{2n}{n}$$

P2. Considere que D_n son las permutaciones sin puntos fijos:

a) Pruebe mediante el método DIE que: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = D_n$

b) Pruebe con el PIE que: $\displaystyle D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$

P3. Considere el siguiente proceso aleatorio, se elige una permutación al azar de $[n]$, y de manera independiente se pinta de manera uniforme, un conjunto $X \subseteq [n]$.
Demostrar que la probabilidad de que en cada ciclo, el menor elemento se encuentre pintado, es: $\displaystyle B = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{2^{-k}}{n!}$

[**Extra**] Pruebe que $(2n-1)!! = B * 2^n n!$, considerando para n impar el producto de los impares entre 1 y n, por ejemplo $7!! = 1 * 3 * 5 = 15$

P4. Pruebe que $\displaystyle 1 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k}$, mediante el método DIE.