MA4006. Combinatoria. 2019.
Profesor: José Soto.

Tarea 2 Versión 02

Fecha límite entrega: ~~Domingo 1 de Septiembre, 23:59~~. Miércoles 4 de Septiembre a las 13:59.

Debe entregarse en PDF (si escanea o fotografía sus soluciones, asegúrese de que sea legible).

Cada hora de atraso (total o parcial) descuenta 10 puntos de su puntaje. Puntaje mínimo: $M = 30$

La nota del control 2 se calculará como sigue, donde C_i es el puntaje calculado de cada tarea.

$$N = \begin{cases} \text{mín}(C_1, C_2, C_3) & \text{si mín}(C_1, C_2, C_3) \leq M, \\ \text{mín}(70, \frac{C_1+C_2+C_3}{3}) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Cíñase a la política de honestidad y colaboración del curso (LÉALA en el archivo admin.pdf en ucursos). Si colabora con alguien en un problema específico debe indicarlo, **dándole crédito** a la o las otras personas con las que discutió. Si no colabora con nadie en un problema, escriba la frase sin colaboración.

Ejercicio 1. Pruebe combinatorialmente que

$$\sum_k \sum_{a \in \text{COM}(n,k)} a_1 \cdot a_2 \cdots a_k = f_{2n}.$$

Indicación: Puede comenzar pensando que la suma de la izquierda equivale al número de maneras de particionar el rectángulo de $1 \times n$ casilleros en rectángulos pequeños de cualquier tamaño y luego marcar en cada rectángulo pequeño un casillero.

Ejercicio 2. Reescribamos la recurrencia de Pascal para coeficientes binomiales como sigue. Si $n = a + b$, con $a, b \geq 1$ entonces

$$\binom{n}{a, b} = \binom{n-1}{a-1, b} + \binom{n-1}{a, b-1}.$$

Demuestre algebraica y combinatorialmente la siguiente generalización multinomial. Si $a \in \text{COM}(n, k)$ entonces:

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \binom{n-1}{a_1 - 1, a_2, \ldots, a_k} + \binom{n-1}{a_1, a_2 - 1, \ldots, a_k} + \cdots + \binom{n-1}{a_1, a_2, \ldots, a_k - 1}.$$

Ejercicio 3. Dos candidatos (llamados, por simplicidad, 1 y 2) se enfrentan en una votación. Los n votos se encuentran en una caja cerrada y se revelan uno a uno. Se sabe que al final del conteo hay a votos para el candidato 1 y b votos para el candidato 2, con $a \geq b$.

Suponga que al leer los votos el orden en el que se revelan los votos es uniforme (es decir, cada uno de los posibles anagramas de $1^a 2^b$ aparece con igual probabilidad). Usando argumentos combinatoriales pruebe que la probabilidad que durante la cuenta el número de votos parciales del primer candidato sea siempre mayor o igual que los del segundo candidato es

$$\frac{a+1-b}{a+1}.$$

Indicación: Use el principio de reflexión de André.

Ejercicio 4. El cuadrado de Durfee μ de una partición $\lambda \vdash n$ es el cuadrado más grande que cabe dentro del Diagrama de Young de λ. Por ejemplo, el cuadrado de Durfee de la partición $(6, 4, 4, 1)$ tiene lado 3 y el cuadrado de Durfee de la partición $(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$ tiene lado 5. Llamemos $q_{a,b}(n)$ al número de particiones de n en a lo más a partes y tal que todas las partes tienen tamaño a lo más b y llame $q_{a,b,c}(n)$ al número de particiones de n en a lo más a partes de tamaño a lo más b y que tiene cuadrado de Durfee de lado c.

(i) Pruebe combinatorialmente que para todo $a, b \in \mathbb{N}$ fijos:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} q_{a,b}(n) = \binom{a+b}{a, b}.$$

Indicación: Le puede servir usar interpretaciones gráficas para particiones y para coeficientes binomiales.

(ii) Pruebe combinatorialmente que para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} q_{a,b,c}(n) = \binom{a}{c}\binom{b}{c}.$$

Ejercicio 5. Definamos el analogo de composiciones débiles para conjuntos. Una k-partición ordenada débil de $[n]$ es una tupla $(A_1, \ldots, A_k) \in \mathcal{P}([n])^k$ que verifica $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, y $\bigcup_{j=1}^k A_i = [n]$. En otras palabras, es similar a una partición ordenada, pero permitimos partes vacías.

Encuentre el número de k-particiones débiles de $[n]$.

Ejercicio 6. Llame $\mathrm{PART}(n,k)$ a las particiones de n en k partes, y para cada $a \in \mathrm{PART}(n,k)$ llame $m(a)$ a su vector de multiplicidad. Pruebe combinatorialmente que

$$k^n = \sum_{a \in \mathrm{WCOM}(n,k)} \binom{n}{a_1, \ldots, a_k},$$

$$k!S(n,k) = \sum_{a \in \mathrm{COM}(n,k)} \binom{n}{a_1, \ldots, a_k},$$

$$S(n,k) = \sum_{a \in \mathrm{PART}(n,k)} \binom{n}{a_1, \ldots, a_k} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m(a)_i!}.$$

Ejercicio 7. Sea $Q(n)$ el número de particiones de $[n+1]$ en las que ninguna parte contiene dos números consecutivos. Por ejemplo, si $n = 2$, las particiones sin consecutivos son $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, $\{\{1,3\},\{2\}\}$ y si $n = 3$, estas son:

$$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}; \quad \{\{1\},\{2,4\},\{3\}\}; \quad \{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}; \quad \{\{1,3\},\{2,4\}\}; \quad \{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}.$$

Por lo que $Q(2) = 2$ y $Q(3) = 5$.

(i) Pruebe que $Q(n)$ satisface la recurrencia

$$Q(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} Q(k).$$

con valor de borde $Q(0) = 1$. Deduzca con esto que $Q(n) = B(n)$ es el n-ésimo número de Bell.

(ii) Encuentre una demostración biyectiva entre los objetos contados por $Q(n)$ y los contados por $B(n)$.
Indicación: A cada partición Π normal de $[n]$ asóciele una de $[n+1]$ obtenida a partir de $\Pi \cup \{\{n+1\}\}$ moviendo cuidadosamente algunos elementos de los bloques de Π a la parte nueva que tiene a $\{n+1\}$ de modo que no hayan elementos consecutivos en ningun bloque. ¿Puede hacer esto de manera biyectiva?

Ejercicio 8. En clases argumentamos sobre las 12 formas de repartir un conjunto A de a objetos (pelotas) en un conjunto B de b cajas. Este problema trata sobre lo que se obtiene al reemplazar **cajas** por **filas**. Notamos que si los objetos (pelotas) son indistinguibles entonces una caja o una fila es lo mismo, así que solo consideraremos los casos donde las pelotas son distinguibles. En la siguiente table contamos las formas de asignar A en B cuando no hay restricciones (asignaciones arbitrarias), cuando cada fila debe recibir a lo más 1 elemento (asignaciones inyectivas) y cuando cada fila debe recibir al menos 1 elemento (asignaciones sobreyectivas). Prellenamos los casilleros correspondientes a asignaciones inyectivas pues ya las conocemos: las filas de a lo más 1 elemento se comportan igual que las cajas de a lo más un elemento. Asimismo, en la tarea 1 se vio que hay exactamente $b^{\overline{a}}$ formas de repartir a personas en b filas distinguibles.

Elementos de A (pelotas)	Elementos de B (filas)	Arbitrarias	Inyectivas	Sobreyectivas
distinguibles	distinguibles	$b^{\overline{a}}$	$b^{\underline{a}}$	(i)
distinguibles	iguales	(ii)	$[\![a \leq b]\!]$	(iii)

Demuestre que las cantidades correspondientes a los casilleros marcados con (i), (ii) y (iii) en la tabla anterior son:

(i) $a!\binom{a-1}{b-1} = a^{\underline{b}}(a-1)^{\underline{a-b}}$,
(Solo necesita probar que (i) corresponde a cualquiera de las dos expresiones)

(ii) $\sum_{i=0}^{b} L(a,i)$, donde $L(a,b)$ es el **número de Lah sin signo** definido en (iii).

(iii) $L(a,b)$ denota el número de maneras de particionar a personas en b filas indistinguibles de manera sobreyectiva. Pruebe que $L(a,b) = \frac{a!}{b!}\binom{a-1}{b-1}$. **Indicación: Justifique formalmente** cualquier multiconteo que use.

Ejercicio 9. Para cada $n, k \in \mathbb{N}$, definimos, al igual que el ejercicio anterior, el número de Lah sin signo $L(n,k)$ como el número de formas de subdividir $[n]$ en k filas no vacías indistinguibles. Formalmente,

$$L(n,k) = \{\{F_1, \ldots, F_k\} \colon F_i \in [n]^* \setminus \{\varepsilon\}, F_1F_2\cdots F_k \in \operatorname{ord}([n])\}.$$

Demuestre las siguientes propiedades de los números de Lah sin signo.
(a) Se satisface la recurrencia

$$\forall n \geq k \geq 0, \quad L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n-1+k)L(n-1,k).$$

con valores de borde $L(n,n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, $L(n,k) = 0, \forall k > n$.
(b) Para todo $n, k \in \mathbb{N}$:

$$k(k+1)L(n,k+1) = (n-k)L(n,k).$$

Ejercicio 10. (i) Recordemos que $r|s$ es la notación para r divide a s. Una cadena de divisores de n es una secuencia $a_0|a_1|\ldots|a_k$ donde $a_0 = 1$, $a_k = n$. Por ejemplo 30 tiene 13 cadenas de divisores:

$$\begin{array}{ccccccc} 1|2|6|30 & 1|2|10|30 & 1|3|6|30 & 1|3|15|30 & 1|5|10|30 & 1|5|15|30 & \\ 1|2|30 & 1|3|30 & 1|5|30 & 1|6|30 & 1|10|30 & 1|15|30 & 1|30. \end{array}$$

Sea n el producto de m primos distintos. Encuentre, en función de valores estudiados en el curso, el número de cadenas de divisores de n.

(ii) Llame para este ejercicio $\operatorname{sobre}(n,k)$ como el cardinal de $|\operatorname{Sobre}([n],[k])|$ o equivalentemente, el tamaño del conjunto de todas las particiones ordenadas de $[n]$ en $[k]$ bloques.

Pruebe combinatorialmente (y directamente) que la siguiente recurrencia define a $\operatorname{sobre}(n,k)_{(n,k)\geq 0}$:

$$\forall n, k \geq 1 \colon \operatorname{sobre}(n,k) = k \cdot \operatorname{sobre}(n-1,k) + k \cdot \operatorname{sobre}(n-1,k-1),$$

con valores de borde $\operatorname{sobre}(0,0) = 1$, y $\operatorname{sobre}(n,0) = \operatorname{sobre}(0,k) = 0$ para $n, k \geq 1$.