Auxiliar 1

Convexidad

Prof: Jorge Amaya
Auxiliar: Diego Reyes Troncoso
Ayudantes: Catalina Murua F., Mariana Salinas Camus, Selma Bobenrieth T.

1 Pregunta 1

a) Sea un semi-espacio de la forma $S = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x < \alpha\}$ con $\alpha > 0$ es *convexo*.

b) De lo anterior, usando la propiedad de la intersección de convexos, probar que un sistema de desigualdades lineales cualquiera es un conjunto *convexo*.

c) Demuestre que el casquete convexo de un número finito de vectores es un conjunto convexo.

Solución:

a) Sea $x, y \in S$, $\lambda \in (0,1)$ probemos que la combinación convexa $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Debemos probar que $z \in S$. Tenemos que $a^T z = \lambda a^T x + (1-\lambda) a^T y$. Luego, como x, y están en S, se cumple que $a^T x < \alpha$ y $a^T y < \alpha$, entonces:

$$\begin{aligned} a^T z &< \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha && (1) \\ &= \alpha && (2) \end{aligned}$$

Finalmente tenemos que $a^T z < \alpha$, entonces $z \in S$, esto prueba que cualquier combinación convexa de elementos en el conjunto S esta contenida en S, por lo tanto, S es convexo.

b) Sabemos que la intersección de conjuntos convexos entrega un conjunto convexo. Sean los sistemas $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \geq \alpha\}$ y $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | b^T x \geq \beta\}$, con $a, b \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. El conjunto $S_0 = S_1 \cap S_2$ es convexo, ya que S_1 y S_2 lo son (demostrado en a)) y además, la intersección es convexa. Tenemos que $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \geq \alpha,\ b^T x \geq \beta\} = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^n a_i x_i \geq \alpha,\ \sum_{i=1}^n b_i x_i\}$, lo cual es un sistema de desigualdades lineales. Esto se puede generalizar a infinitas desigualdades y el sistema seguirá siendo convexo, ya que la intersección de inifinitos conjuntos también lo es.

c) El casquete convexo (o envoltura convexa) de un número finito de vectores es el menor conjunto que contiene a todas la posibles combinaciones convexas de dichos vectores (Recordemos que para mostrar que un conjunto es convexo basta mostrar que cualquier combinación convexa de puntos arbritrarios del conjunto está contenida en el conjunto). Sean $x_1, \ldots, x_k$ y sea Q el casquete convexo formado por dichos vectores Entonces: sea $y, z \in Q$ tales que $y = \sum_{i=1}^{k} \xi_i x_i,\ z = \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i$, con $\theta_i, \xi_i \geq 0,\ i = 1, \ldots k$ donde $\sum_{i=1}^{k} \xi_i = 1$ y $\sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1$. Veamos si la combinación $\lambda y + (1-\lambda) z \in Q$, con $\lambda \in (0,1)$.

$$\lambda y + (1-\lambda) z \in Q = \sum_{i=1}^{k} \lambda \xi_i x_i + \sum_{i=1}^{k} (1-\lambda) \theta_i x_i \tag{3}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} x_i (\lambda \xi_i + (1-\lambda) \theta_i) \tag{4}$$

Notemos que es una combinación lineal de los k vectores con coeficientes $\lambda \xi_i + (1-\lambda)\theta_i,\ i = 1, \ldots, k$. Debemos demostrar que es un combinación convexa (que los coeficientes son mayores que 0 y que suman 1). Por definición $\lambda \geq 0$ y $1 - \lambda \geq 0$, $\Rightarrow \lambda \xi_i \geq 0$ y $(1-\lambda)\theta_i \geq 0 \Rightarrow \lambda \xi_i + (1-\lambda)\theta_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, k$. Ahora falta mostrar que suman 1.

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda \xi_i + (1-\lambda)\theta_i = \lambda \sum_{i=1}^{k} \xi_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{k} \theta_i \tag{5}$$

$$= \lambda + (1-\lambda) = 1 \tag{6}$$

Por lo tanto la combinación convexa $\lambda x + (1-\lambda) z$ es una combinación convexa de los k vectores, lo que por definición pertenece al casquete convexo.

2 Pregunta 2

a) Dado $c, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m \geq 0$, muestre que el conjunto $\{y \in \mathbb{R}^n | c - \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i \geq 0\}$ es convexo.

b) Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\}$, demuestre que es *convexo*.

Solución:

a) Sean los vectores x, y en el conjunto, sea $\lambda \in (0,1)$, la combinación convexa de los vectores pertenece a $\mathbb{R}^n$, falta mostrar que cumple la desigualdad.

$$c - \sum_{i=1}^{m} \lambda x_i + (1-\lambda) y_i = \lambda c + (1-\lambda) c - \sum_{i=1}^{m} \lambda x_i + (1-\lambda) y_i \tag{7}$$

$$= \lambda (c - \sum_{i=1}^{m} x_i) + (1-\lambda)(c - \sum_{i=1}^{m} y_i) \tag{8}$$

Como x, y estan en el conjunto, cumplen que $c - \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i \geq 0$ y $c - \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i \geq 0$ y $\lambda \in (0,1)$, tenemos que $c - \sum_{i=1}^{m} \lambda x_i + (1-\lambda) y_i \geq 0$

b) Sean $x, y \in S$ y $\lambda \in (0,1)$, tenemos que $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in \mathbb{R}^3$, además:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Luego:

$$\begin{aligned} z_1 + 2z_2 - z_3 &= \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 + 2(\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2) - (\lambda x_3 + (1-\lambda)y_3) && (10)\\ &= \lambda(x_1 + 2x_2 - x_3) + (1-\lambda)(y_1 + 2y_2 - y_3) && (11)\\ &= \lambda 2 + (1-\lambda)2 = 2 && (12) \end{aligned}$$

Por lo tanto S es convexo.

3 Preguntas 3

a) Sean $f_1, f_2, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones convexas. Demuestre que la función $f(x) = max_{i=1,\ldots,m} f_i(x)$ es también convexa.

b) Demuestre que una función $f : S \to \mathbb{R}$ es *convexa* si y sólo si $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_k \in S$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geq 0$ tal que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ se cumple:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_k f(x_k). \tag{13}$$

c) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. Muestre que $S = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} | f(x) < z\}$ es convexo.

Solución:

a) Una función g es convexa si $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$ con $\lambda \in (0,1)$. Veamos si f es convexa:

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \max_{i=1,\ldots,m} f_i(\lambda x + (1-\lambda)y) && (14)\\ &\leq \max_{i=1,\ldots,m} \lambda f_i(x) + (1-\lambda)f(y) && (15)\\ &\leq \lambda \max_{i=1,\ldots,m} f_i(x) + (1-\lambda) \max_{i=1,\ldots,m} f(y) && (16)\\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) && (17) \end{aligned}$$

Donde obtenemos la desigualdad buscada. En (15) se usó que f_i es convexa y en (17) la definición de f.

b)

$\Leftarrow$

La desigualdad se cumple para k vectores con $k \in \mathbb{N}$, si tomamos $k = 2$ tenemos la definición de convexidad.

$\Rightarrow$

Sabemos que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ con $\lambda \in (0,1)$. Podemos tomar $y = \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i z_i$, con $\theta_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i = 1$, es decir, como una combinición convexa de los términos $z_i,\ i = 1, \ldots, k-1$ (ojo que aquí no es relevante el conjuto al que pertenecen los términos, son arbitrarios). De modo que:

$$f(\lambda x + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i z_i) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(\sum_{i=1}^{k-1} \theta_i z_i) \tag{18}$$

$$\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i f(z_i) \tag{19}$$

$\lambda f(x) + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i f(y)$ es una suma ponderada de f evaluado en k términos. Mostremos que la combinación es convexa. Los k coeficientes λ y $(1-\lambda)\theta_i,\ i = 1, \ldots, k-1$ son mayores o iguales a 0 y además:

$$\lambda + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i = \lambda + (1-\lambda) = 1. \tag{20}$$

Los coeficientes suman 1, por lo tanto se cumple lo que buscabamos.

c) Sean los pares (x, z_1) y (y, z_2), la combinación convexa está contenida en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Luego:

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{21}$$

Ya que f es convexa. Finalmente, como $x, y \in S$:

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leq \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \tag{22}$$

$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in S \Rightarrow S$ es convexo.