P1) Sea el Problema: $\min\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + n x_n$

$$
\begin{aligned}
\text{s.a: } & x_1 \geq 1 \\
& x_1 + x_2 \geq 2 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\
& \vdots \\
& x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq n \\
& x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 .
\end{aligned}
$$

a) Dual:

$$
\begin{aligned}
\max\ & y_1 + 2 \cdot y_2 + \dots + n \cdot y_n \\
\text{s.a: } & y_1 + y_2 + \dots + y_n \leq 1 \\
& y_2 + \dots + y_n \leq 2 \\
& \vdots \\
& y_n \leq n \\
& y_1, y_2, \dots, y_n \geq 0
\end{aligned}
$$

b) La función objetivo del problema: $Z = \sum_{i=1}^{n} i x_i$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} (i-1) x_i \\
&\geq n + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (i-1) x_i}_{\geq 0}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ n es una cota inferior de Z

y se alcanza cuando $\sum_{i=1}^{n} (i-1) x_i = 0$, y como $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$.

$\Rightarrow$ se alcanza cuando $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$.

Por lo tanto el problema es equivalente a:

$$
\left.
\begin{aligned}
\min\ & x_1 \\
\text{s.a: } & x_1 \geq 1 \\
& \vdots \\
& x_1 \geq n \\
& x_1, \dots, x_n \geq 0
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(sol única)}
$$

c) Usando Holgura Complementaria tenemos que:

$$\bar{X}_1 (y_1 + y_2 + \ldots + y_n - 1) = 0$$

pero $\bar{X}_1 = n > 0 \Rightarrow y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1.$

Cumpliendo esta restricción, todos los demás también se cumplen en el Dual ($\leq 2, \leq 3, \ldots \leq n$). Por lo que el problema es equivalente a:

$$\max \; y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n$$
$$\text{s.a: } y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$$
$$y_1, y_2, \ldots \; y_n \geq 0$$

Por Dualidad Fuerte: Valor óptimo Primal = Valor óptimo Primal

$$\Rightarrow y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n = n$$
$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1 \quad / \cdot n \quad \text{Ponderando por } n.$$

$$\Rightarrow \quad y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n = n \quad \downarrow -$$
$$ny_1 + ny_2 + \ldots + ny_n = n$$

$$(n-1)y_1 + (n-2)\cdot y_2 + \ldots + 1 \cdot y_{n-1} = 0 \Rightarrow \bar{y}_i = 0, \; i = 1, \ldots, n-1$$

Y como debe cumplirse que $y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n = 1$

$$\Rightarrow \bar{y}_n = 1$$

por lo tanto, la solución del Dual es $\bar{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

P2) Para el problema $\min c^T x$, $Ax = b$, $x \geq 0$, tenemos el siguiente tableau:

$$
\begin{array}{cccccc|c}
\alpha & 0 & 0 & 2 & 0 & & 10 \\
\hline
-1 & 0 & 1 & 6 & 0 & & 4 \\
\beta & 1 & 0 & -4 & 0 & & 1 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 1 & & \eta \\
x_1 & \cdots & & & x_6 & &
\end{array}
$$

→ notemos que la base es:

$x_{B(1)} = x_3$
$x_{B(2)} = x_2$
$x_{B(3)} = x_5$

a) Para que la solución en curso sea óptima, esta debe ser i) factible → $\eta \geq 0$

ii) Costos reducidos mayores a 0 → $\alpha > 0$

* si $\alpha \geq 0$, en el caso en que sea $\alpha = 0$ la solución no es única y existe otra SBF que entrega el mismo valor mínimo

$\Rightarrow \quad \bar{x} = (4, 1, \eta)$

b) Debe haber un costo reducido negativo $\Rightarrow \alpha < 0$

y su vector u asociado negativo $\Rightarrow \beta \leq 0$.

La solución ha de ser factible $\Rightarrow \eta \geq 0$.

Ejemplo: $\alpha = -1$, $\beta = -2$, $\eta = 3 \quad \Rightarrow$

$$
\begin{array}{ccccc|c}
-1 & 0 & 0 & 2 & 0 & \\
\hline
-1 & 0 & 1 & 6 & 0 & 4 \\
-2 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3
\end{array}
$$

$\hookrightarrow B^{-1} a_j$

Por teorema de Caracterización:

$$B^{-1} \cdot a_j = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow d = \begin{pmatrix} -B^{-1} \cdot a_j \\ e_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) La solución en curso es óptima pero no única.

$\Rightarrow \alpha = 0$ (existe otra solución).

$\Rightarrow \beta > 0$ (para poder iterar el simplex)

$\Rightarrow \eta \geq 0$ (El óptimo actual es factible)

Ejemplo: $\beta =$ [illegible], $\eta = 3$, $\bar{x} = (0, 1, 4, 0, 3)$, $z = -10$.

$$
\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 10 \\
\hline
-1 & 0 & 1 & 6 & 0 & 4 \\
1 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3
\end{array}
\Rightarrow
\left.
\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 10 \\
\hline
0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 5 \\
1 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3
\end{array}
\right\}
\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

Scanned with CamScanner

O sea. El conjunto solución es el trozo:

$$S = \left\{ x \mid x = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ \lambda \in [0,1] \right\}$$

d) Solución factible pero no óptima:

→ Costo reducido negativo: $\alpha < 0$

→ factible: $\eta \geq 0$.

Ejemplo: $\alpha = -1,\ \beta = 1,\ \eta = 3$

$$\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 6 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 11 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = (1, 0, 5, 0, 3)$$

e) Para que el dual sea infactible, el primal debe ser No acotado. Esto ya que por Dualidad Débil:

$$c^T x \geq b^T y$$

si el primal es no acotado $\qquad -\infty \geq b^T y$ → vamos a maximizar algo que es $-\infty$. xD

Basta decir que es el mismo caso que en la parte b).

P3) a) $\cdot\ f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cóncava

$\cdot\ P \subseteq \mathbb{R}^n$ poliedro acotado, no vacío.

sol:

Como f es cóncava en $\mathbb{R}^n$ entonces es continua.

$\Rightarrow$ f es continua sobre P (que es cerrado y acotado)

Por Teorema de Weierstrass, f alcanza su mínimo y máximo en P.

b) Sean $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k$ los puntos extremos de P. Por teorema de caracterización: $x \in P$ se puede escribir como combinación convexa de los puntos extremos de P, es decir:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \hat{x}_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \ , \ \lambda_i \geq 0 \ , \ i=1,\dots,k.$$

Luego, como f es cóncava:

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \hat{x}_i\right) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\bar{x})$$

donde $\bar{x}$ es el punto extremo en que se alcanza el mínimo de f.

$$\Rightarrow f(x) \geq f(\bar{x}) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}_{1} \Rightarrow f(x) \geq f(\bar{x}) \quad \forall x \in P.$$

Luego $\bar{x}$ es un mínimo de f sobre P.

c) $x, y \in S$, g convexa:

$$g(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq g(x)\cdot\lambda + (1-\lambda) g(y)$$

$$h(g(\lambda x + (1-\lambda) y)) \leq h(\lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)) \quad (h \text{ creciente})$$

$$\leq \lambda h(g(x)) + (1-\lambda) h(g(y)) \quad (h \text{ convexa}).$$

$$\Rightarrow h \circ g(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda\, h\circ g(x) + (1-\lambda)\, h \circ g(y)$$