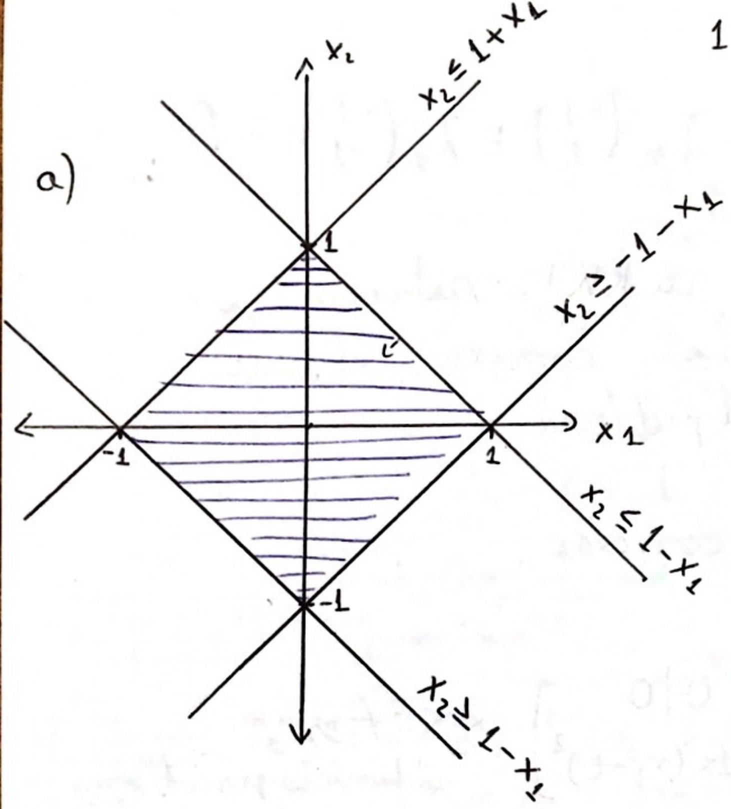
1 $t \in \mathbb{R}$, $\min (x_1 - \frac{3}{2})^2 + (x_2 - t)^2$

$$\text{s.t: } \begin{aligned} 1 - x_1 - x_2 &\geq 0 \\ 1 - x_1 + x_2 &\geq 0 \\ 1 + x_1 - x_2 &\geq 0 \\ 1 + x_1 + x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a)



Para poder escribir las condiciones de KKT debemos reformular el problema como:

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{s.t. } g_i(x) \leq 0 \\ &\quad\ \ h_j(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \min (x_1 - \tfrac{3}{2})^2 + (x_2 - t)^2$$

$$\text{s.t: } \begin{aligned} -1 + x_1 + x_2 &\leq 0 \\ -1 + x_1 - x_2 &\leq 0 \\ -1 - x_1 + x_2 &\leq 0 \\ -1 - x_1 - x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Entonces, las condiciones de KKT son:

$$\left.\begin{aligned} -1 + x_1 + x_2 &\leq 0 \\ -1 + x_1 - x_2 &\leq 0 \\ -1 - x_1 + x_2 &\leq 0 \\ -1 - x_1 - x_2 &\leq 0 \end{aligned}\right\} \text{factibilidad Primal}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \\ \lambda_3 &\geq 0 \\ \lambda_4 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \text{factibilidad Dual}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 (-1 + x_1 + x_2) &\geq 0 \\ \lambda_2 (-1 + x_1 - x_2) &\geq 0 \\ \lambda_3 (-1 - x_1 + x_2) &\geq 0 \\ \lambda_4 (-1 - x_1 - x_2) &\geq 0 \end{aligned}\right\} \text{holgura Complementaria}$$

faltan solo los de gradientes alineados:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x_1 - \frac{3}{2}) \\ 4(x_2 - t)^3 \end{pmatrix} \quad , \quad \nabla g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla f + \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \nabla g_i = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 3 \\ 4(x_2 - t)^3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

b) Utilizando uno de los Teoremas de KKT, sabemos que para todo problema de optimización convexa, el punto que cumple KKT es la solución del problema.

Como $\{g_i\}_{i=1}^{4}$ son lineales $\Rightarrow$ son convexas.

Calculemos el Hessiano de $f(x_1, x_2)$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x_1 - \frac{3}{2}) \\ 4(x_2 - t)^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12(x_2 - t)^2 \end{bmatrix} \rightarrow \nabla^2 f \text{ es semi-definido positivo}$$

$\Rightarrow f$ es convexa

No hay h_j en este problema.

Como el problema es de optimización convexa $\Rightarrow$ todo $x \in \mathbb{R}^2$ que cumpla KKT es óptimo.

c) Para poder asegurar esto debemos verificar que se cumpla calificación de restricciones.

Notemos que $\{\nabla g_i\}_{i=1}^{4}$ no son l.i. así que solo nos queda ver que se cumpla la condición de Slater.

punto $(0,0)$ es factible y $g_i(0,0) > 0 \ \forall i = 1, \dots, 4.$

Por lo tanto se cumple Slater.

Con esto podemos usar el segundo teorema de KKT.

$\Rightarrow$ Si X es óptimo del problema, debe cumplir KKT.

d) Veamos como afecta el punto $(1,0)$ a las condiciones de KKT. $\Rightarrow \nabla f(1,0) + \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \nabla g_i(1,0) = 0$

$$\left.\begin{aligned} 2 - 3 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \ \lambda_4 &= 0 \\ -4t^3 + \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Gradientes alineados}$$

$$\left.\begin{aligned} -1 + 1 \leq 0 &\Rightarrow 0 \leq 0 \\ -1 - 1 \leq 0 &\Rightarrow -2 \leq 0 \end{aligned}\right\} \text{factibilidad Primal}$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \ \} \text{ fact. Dual.}$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 0 \longleftarrow \left.\begin{aligned} \lambda_3(-2) &= 0 \\ \lambda_4(-2) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{holgura complementaria.}$$

$$-1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$$

$$-4t^3 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 4t^3 \in [-1, 1]$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 4t^3 \geq -1 &\Rightarrow t \geq -\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}} \\ 4t^3 \leq 1 &\Rightarrow t \leq \sqrt[3]{\tfrac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t \in \left[-\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}, \sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}\right]$$

Para t en es rango, el punto $(1,0)$ cumplirá KKT.

P2 | a) Buscamos minimizar la distancia de modo que:

$$\min_{x} \|u - x\|$$
$$\text{s.t} \quad x_{i+1} - x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, n-1$$

equivalentemente podemos trabajar con la norma al cuadrado ya que esta es creciente en los positivos.

$$\Rightarrow \quad \min_{x} \|u - x\|_2^2$$
$$\text{s.t}: \; x_{i+1} - x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, n-1$$

$$\Rightarrow \quad \min \sum_{i=1}^{n} (u_i - x_i)^2$$
$$\text{s.t}: \; x_{i+1} - x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, n-1.$$

que es un Problema de optimización convexa ya que:

- La f.O. es convexa (toda norma es convexa).
- Las $n-1$ desigualdades son lineales, por lo tanto, convexas.

Gracias a que la norma es continua y está siendo minimizada en un sistema de desigualdades lineales, por ende, cerrado y acotado, gracias al Teorema de Weierstrass podemos asegurar que se alcanza el mínimo.

b) Veamos primero si el problema cumple calificación de restricciones. $g_i(x) = x_i - x_{i+1} \Rightarrow \nabla g_i(x) = e_i - e_{i+1}$

Luego, $\{\nabla g_i(x)\}_{i=1}^{n-1}$ son l.i. ya que.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ sólo tiene solución cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$

Dado que se cumple la condición de independencia lineal de los gradientes, el óptimo del problema debe cumplir KKT.

…onces, si $\bar{X}$ es el óptimo del problema: $\exists\ \mu \in \mathbb{R}^{n-1}$ tal que:

(i) $\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$ → Gradientes alineados

(ii) $\mu_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n-1$

(iii) $\bar{x}_i - \bar{x}_{i+1} \leq 0 \quad i = 1, \dots, n-1$

(iv) $\mu_j \cdot g_j(\bar{x}) = 0.$

Como $\nabla f(x) = (2(u_1 - \bar{x}_1)(-1), \dots, 2(u_n - \bar{x}_n)(-1)) = -2(u - \bar{x}).$

$$\nabla g_j(x) = e_j - e_{j+1} \quad j = 1, \dots, n-1$$

$$\Rightarrow \text{(i)} \ -2(u - \bar{x}) + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \mu_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -2u_1 - 2\bar{x}_1 + \mu_1 = 0$$

$$-2u_j - 2\bar{x}_j - \mu_{j-1} + \mu_j = 0 \quad j = 2, \dots, n-1.$$

$$-2u_n - 2\bar{x}_n - \mu_{n-1} = 0$$

(ii) $\mu_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n-1$

(iii) $\mu_j (\bar{x}_j - \bar{x}_{j+1}) = 0 \quad 1, \dots, n-1$

(iv) $\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2 \leq \dots \leq \bar{x}_n$

Notemos que en (i) $\mu_1 = 2(u_1 - \bar{x}_1)$ y que $\mu_j = \mu_{j-1} + 2(u_j - \bar{x}_j)$

luego: $\mu_j = \mu_{j-1} - 2(u_j - \bar{x}_j)$

$$= \mu_{j-2} + 2(u_{j-1} - \bar{x}_{j-1}) + 2(u_j - \bar{x}_j)$$

$$\vdots$$

$$= \mu_1 + 2\sum_{i=2}^{j} (u_i - \bar{x}_i)$$

$$\mu_j = 2(u_1 - \bar{x}_1) + 2\sum_{i=2}^{j} (u_i - \bar{x}_i) = 2\sum_{i=1}^{j} (u_i - \bar{x}_i) \geq 0$$

Donde hemos obtenido la primera desigualdad buscada.

De la ecuación anterior: $\frac{\mu_j}{2} = \sum_{i=1}^{j} (u_i - \bar{x}_i)$

Como $\bar{x}$ cumple holgura complementaria:

$$\mu_j (\bar{x}_j - \bar{x}_{j-1}) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{j} (u_i - \bar{x}_i)\right) (\bar{x}_j - \bar{x}_{j-1}) = 0 \quad , j = 1, \dots, n-1$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{i=1}^{j} (u_i - \bar{x}_i)\right] (\bar{x}_j - \bar{x}_{j-1}) = 0 \qquad j = 1, \dots, n-1$$

Que es la tercera ec. pedida.

De la ecuación $-2u_n - 2\bar{x}_n - \mu_{n-1} = 0$

pero $\mu_{n-1} = 2 \sum_{i=1}^{n-1} (u_i - \bar{x}_i) \Rightarrow -2u_n - 2\bar{x}_n - 2 \sum_{i=1}^{n-1} (u_i - \bar{x}_i) = 0$

$$-2 \sum_{i=1}^{n} (u_i - \bar{x}_i) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (u_i - \bar{x}_i) = 0$$

finalmente: $-\mu_{n-1} = 2(u_n - x_n) \Rightarrow -\frac{\mu_{n-1}}{2} = (u_n - \bar{x}_n)$

por holgura complementaria $\mu_{n-1} (\bar{x}_{n-1} - \bar{x}_n) = 0$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \mu_{n-1} (\bar{x}_{n-1} - \bar{x}_n) = 0$$

$$\Rightarrow (u_n - \bar{x}_n)(\bar{x}_{n-1} - \bar{x}_n) = 0.$$