

Auxiliar 8 - Optimización No Lineal

Profesor: Jorge Amaya

Auxiliar: Diego Reyes, Javier Monreal

P1. Sea $t \in \mathbb{R}$ un parámetro. Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - \frac{3}{2})^2 + (x_2 - t)^2 \\ \text{subject to} \quad & 1 - x_1 - x_2 \geq 0 \\ & 1 - x_1 + x_2 \geq 0 \\ & 1 + x_1 - x_2 \geq 0 \\ & 1 + x_1 + x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Grafique el conjunto de soluciones factibles. y escriba las condiciones de KKT para el problema
- Demuestre que si un punto $x \in \mathbb{R}^2$ cumple las condiciones de KKT de este problema, entonces x es la solución óptima.
- Demuestre que si un punto $x \in \mathbb{R}^2$ es óptimo para este problema, entonces x satisface las condiciones de KKT.
- ¿Para que valores de t el punto $(1,0)$ cumple las condiciones de KKT.

P2. Dado $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, nos proponemos encontrar un $x \in \mathbb{R}^n$ que verifique $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ y se encuentre lo más posible de u .

- Formalice el problema como uno de minimización convexa y explique por qué tiene solución.
- Pruebe que el $\bar{x}$ óptimo satisface:

$$\sum_{i=1}^j (u_i - \bar{x}_i) \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n-1 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{x}_i) = 0 \quad (2)$$

$$\left(\sum_{i=1}^j (u_i - \bar{x}_i) \right) (\bar{x}_j - \bar{x}_{j+1}) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n-1 \quad (3)$$

$$(u_n - \bar{x}_n)(\bar{x}_{n-1} - \bar{x}_n) = 0 \quad (4)$$

Resumen

1. Funciones Convexas

Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{C}^2$. Sea $x_1, x_2 \in S$, f es convexa si:

- (a) $f(x_2) - f(x_1) \geq \nabla f(x_1)^T(x_2 - x_1)$
- (b) $\nabla^2 f$ es semidefinida positiva, es decir, $x^T \nabla^2 f x \geq 0, \forall x$.

2. Condiciones de KKT

Sea el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{subject to} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Diremos que $\bar{x}$ cumple las condiciones de KKT si: $\exists \lambda_i, \mu_j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, tales que:

$$g_i(\bar{x}) \leq 0, \quad h_j(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \quad (5)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \mu_j \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \quad (6)$$

$$\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0. \quad (8)$$

3. Calificación de restricciones

- (a) $\{\nabla g_i\}_{i=1}^n$ y $\{\nabla h_j\}_{j=1}^m$ son linealmente independientes.
- (b) h_j es lineal, g_i es convexa y $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tal que $g_i(x) < 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

4. Teoremas de KKT

- (a) Si un problema de optimización es convexo (f convexa, g_i lineal y h_j es afín). Entonces, el punto que cumple KKT es mínimo global.
- (b) Si es mínimo global y el problema cumple calificación de restricciones, entonces el mínimo cumple KKT.