...do extremo

Si
factibl

P1

$$\min \quad 3x_1 + x_2 + 9x_3 + x_4$$

$$\text{s.a} \quad x_1 + 3x_3 + x_4 = 4$$

$$x_2 + x_3 - x_4 = 2$$

$$x \geq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

B	N	b	$\rightsquigarrow$	I	$B^{-1}N$

¿Que base tomamos?

tomemos $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Miremos el tableau

1	0	3	1	4
0	1	1	-1	2

$\rightsquigarrow$

1/3	0	1	1/3	4/3
-1/3	1	0	-4/3	2/3

. Notemos que $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ [illegible]

$\begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix}$ es factible pues es ≥ 0

Veamos ahora sus costos reducidos $\bar{c}_N = c_N - c_B^t B^{-1} N$

$$\bar{c}_N = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} -1/3 & -4/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$-4/3 + 9/3 = 5/3$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} +8/3 \\ 5/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

$\frac{16+8}{3} =$

el tablesu fue do

1/3	0	(0)	-2/3 ↓	-38/3 ↘
1/3	1	0	-4/3	2/3
3	0	1	(1/3)	4/3 ←

$\rightsquigarrow$

1	0	2	0	$-30/3 = -10$
1	1	4	0	16
1	0	3	1	4

obtenemos el optimo.

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$ de valor = 10.

ii) Si cambiamos el costo, el punto sigue siendo extremo y factible, solo verificamos su optimalidad

$$\bar{c}_N = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow$ No es optimo. Habria que seguir iterando.

iii) veamos el dual.

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{MAX} \quad & 4y_1 + 2y_2 \\ \text{S.a.} \quad & y_1 \leq 3 \\ & y_2 \leq 1 \\ & 3y_1 + y_2 \leq 9 \\ & y_1 - y_2 \leq 1 \end{aligned}$$

P2

$$\min \quad \frac{x_1 + 1}{x_2 + 2}$$

$$\text{s.a} \quad x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

notemos $\frac{x_1+1}{x_2+2} = \frac{x_1}{x_2+2} + \frac{1}{x_2+2}$

y consideremos $y_1 = \frac{x_1}{x_2+2}$, $z = \frac{1}{x_2+2}$

busco escribir la primera restriccion.

Notemos que

$$x_1 + x_2 \leq 1 \iff \frac{x_1}{x_2+2} + \frac{x_2}{x_2+2} \leq z.$$

Lo que inspira a considerar $y_2 = \frac{x_2}{x_2+2}$

tengo asi $x_1 + x_2 \leq 1 \iff y_1 + y_2 \leq z$

Es importante ademas que tanto y_2, como z, esten "hablando" del mismo x_2, por lo que se debe cumplir. $2z + y_2 = 1$

El problema finalmente queda.

$$\min \quad y_1 + z$$

$$\text{S.a.} \quad y_1 + y_2 \leq z$$

$$2z + y_2 = 1$$

$$y_1, y_2, z \geq 0.$$

P3)

$$\min \quad x_1 + |x_2| + x_3$$

$$x_1 + 2x_3 \leq 2$$

$$2x_1 + x_3 = 0$$

$$x \geq 0$$

Notemos que $|x_2| = \max\{x_2, -x_2\}$

Así queda:

$$\min \quad \max\{x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 - x_2 + x_3\}$$

$$\text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + x_3 = 0$$

$$x \geq 0$$

consideremos $x_4 = \max\{x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 - x_2 + x_3\}$

obtenemos

$$\min \quad x_4$$

$$\text{s.a} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq x_4$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq x_4$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + x_3 = 0$$

$$x \geq 0.$$

Agregamos las Holguras y obtenemos.

$$\min \quad x_4$$

$$\text{S.a.} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_6 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_7 &= 2 \\ 2x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$x \geq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculemos su dual.

$$\max \quad 2y_3$$

$$x \geq 0.$$

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 &\leq 0 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 &\leq 0 \\ y_1 + y_2 + y_4 &\leq 0 \\ -y_1 - y_2 &\leq 1 \\ y_1 &\leq 0 \\ y_2 &\leq 0 \\ y_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

P4 $\min\ 8x_1 - 9x_2 + 12x_3 + 4x_4 + 11x_5$

s.a. $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 1$

$x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \leq 1$

$5x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq 22$

$X \geq 0$

su dual:

$\max\ y_1 + y_2 + 22y_3$

s.a.

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 + 5y_3 &\leq 8 \\ -3y_1 + 7y_2 + 4y_3 &\leq -9 \\ 4y_1 + 3y_2 - 6y_3 &\leq 12 \\ y_1 - 2y_2 + 2y_3 &\leq 4 \\ 3y_1 + y_2 + 3y_3 &\leq 11 \end{aligned}$$

$Y \leq 0$

veamos que $X = (0{,}2, 0{,}7, 0)$ es FACTIBLE

en la primera restricción $1 = 1$

$\leq$ segunda restricción $0 \leq 1$

$=$ tercera restricción $22 = 22$.

supongAmos que es el optimo

Por dualidad fuerte $\exists\, y^*$ optimo del dual que cumple HOLGURA complementaria

esto es $y^*(b - A x^*) = 0$

tengo que x^* debe ser FACTIBLE

$\Rightarrow \quad Ax^* \leq b \quad \Rightarrow \quad 0 \leq b - Ax^*$

y $y^* \leq 0$

tengo un producto punto de vectores menores A 0 que da 0, $\Rightarrow \quad y_j^* = 0 \quad$ o $\quad b_j - a_j^t x^* = 0 \quad \forall j$

↑ HOLGURA.

tengo ASI que $y_2^* = 0$

y que como $x_2^* > 0$, $x_4^* > 0$

LAS restricciones (2) y (4) del dual se SATISFACEN con IGUALDAD

$$\Rightarrow \begin{aligned} -3y_1 + 4y_3 &= -9 \\ y_1 + 2y_3 &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y_1 = 4 - 2y_3$$

no $-12 + 6y_3 + 4y_3 = -9 \Rightarrow y_3 = \frac{1}{10} \cdot 3 = \boxed{\frac{3}{10} = y_3}$ contradicción $\rightarrow \leftarrow$.

$y_1 = 4 - \frac{3}{5} = \frac{20-3}{5} = \frac{17}{5} \Rightarrow \boxed{y_1 = \frac{17}{5}}$ infactible pues $y \leq 0$