

Punto Trabajo dirigido.

P1 (i) demostrar que $Z(b) = \max \{C^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ es cóncava.

sol: Sean b_1 y b_2 factibles en Z , de modo que x^* es el óptimo de $Z(\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2)$, es decir, evaluarlo en la combinación convexa, con $\lambda \in (0, 1)$.

Sea x_1^* el óptimo $Z(b_1)$ y x_2^* el óptimo de $Z(b_2)$

Como x_1^* es óptimo de $Z(b_1)$, en particular es factible:

$$Ax_1^* \leq b_1 \quad (i) \quad (\text{condición de factibilidad}).$$

equivalentemente para x_2^*

$$Ax_2^* \leq b_2 \quad (ii)$$

Ponderando (i) por λ y (ii) por $(1-\lambda)$:

$$\lambda Ax_1^* \leq \lambda b_1 \quad (i) \quad , \quad (1-\lambda) Ax_2^* \leq (1-\lambda) b_2 \quad (ii)$$

sumando ambas desigualdades:

$$\lambda Ax_1^* + (1-\lambda) Ax_2^* \leq \lambda b_1 + (1-\lambda) b_2$$

$$A(\lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^*) \leq \lambda b_1 + (1-\lambda) b_2 \quad (\text{factibilidad para } Z(\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2))$$

$\Rightarrow$ Entonces, $\lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^*$ es factible en $Z(\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2)$.

Como x^* es el óptimo de $Z(\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2)$

$$\Rightarrow C^T x^* \geq C^T x \quad \forall x \text{ factible en } \quad (\text{necesitamos que es de maximización, por eso } \geq \text{ y no } \leq)$$

En particular, probamos con $x = \lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^*$

$$\Rightarrow C^T x^* \geq C^T (\lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^*)$$

$$C^T x^* \geq \lambda \underbrace{C^T x_1^*} + (1-\lambda) \underbrace{C^T x_2^*}$$

$$Z(\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2) \geq \lambda Z(b_1) + (1-\lambda) Z(b_2)$$

Donde obtenemos la desigualdad que caracteriza la convexidad.

(ii) $V(c) = \max \{C^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ es convexa.

sol: Sean C_1 y C_2 de modo que x_1^* es óptimo de $V(C_1)$, x_2^* es óptimo de $V(C_2)$ y x^* óptimo de $V(\lambda C_1 + (1-\lambda) C_2)$.

Como x_1^* es óptimo de $V(C_1)$: $C_1^T x_1^* \geq C_1^T x^*$ (i)

Equivalentemente: $C_2^T x_2^* \geq C_2^T x^*$ (ii)

Ponderando (i) y (ii):

$$\lambda C_1^T x_1^* \geq \lambda C_1^T x^* \quad (i) \quad \text{y} \quad (1-\lambda) C_2^T x_2^* \geq (1-\lambda) C_2^T x^* \quad (ii)$$

Con $\lambda \in (0, 1)$.

$$\text{sumando (i) y (ii):} \quad \lambda \underbrace{C_1^T x_1^*} + (1-\lambda) \underbrace{C_2^T x_2^*} \geq \underbrace{(\lambda C_1 + (1-\lambda) C_2)^T x^*}$$
$$\Rightarrow \lambda V(C_1) + (1-\lambda) V(C_2) \geq V(\lambda C_1 + (1-\lambda) C_2).$$

Por lo tanto: V es convexa.

21 sea el Problema: $\min c^T x$ y x^* su solución
s.a: $Ax = b$
 $x \geq 0$ óptima.

Sean $x_1^*, \dots, x_p^* > 0$ y cero para los demás componentes.

Demuestre que $Ad = 0$ no tiene solución.
 $c^T d < 0$

$$d_{p+1}, \dots, d_n \geq 0$$

sol. 1050! Que no tenga solución quiere decir que
 $\nexists d$ que satisfaga todas las desigualdades/igualdades.

Razonemos por contradicción: Supongamos que $\exists d$:

$Ad = 0$, $c^T d < 0$ y $d_{p+1}, \dots, d_n \geq 0$. (d es solución del sistema).

$\exists t$ lo suficientemente chico: $\bar{x} = x^* + td \geq 0$ (recordemos que no sabemos el signo de $d_1, \dots, d_p$; por lo tanto, el t chico nos asegura que x sigue siendo positivo).

Luego, x también cumple: $Ax = Ax^* + t \overset{0}{Ad} = Ax^* = b$.

$\Rightarrow \bar{x}$ es factible en el problema de minimización.

Pero: como x^* es el óptimo, se cumple que:

$$c^T x^* \leq c^T (\underbrace{x^* + td}_{\bar{x}}) \Rightarrow c^T x^* \leq c^T x^* + c^T d \cdot t$$
$$\Rightarrow 0 \leq c^T d \cdot t \Rightarrow c^T d \geq 0.$$

$\rightarrow \leftarrow$
contradicción.

b) (P) $\min \max \{x_1 - x_2, -x_1 - 3x_2\}$

s.a: $2x_1 - x_2 \leq 8$

$x_1, x_2 \geq 0.$

Sol: Los problemas min(max) se resuelven así: Definimos una nueva variable Z y planteamos un nuevo problema.

(P') $\min Z$

s.a: $Z \geq x_1 - x_2$

$Z \geq -x_1 - 3x_2$

$2x_1 - x_2 \leq 8$

$x_1, x_2 \geq 0.$

Como poseer de un Poliedro normal a uno estandar está explicado en la parte de la P3 - Aux 5.

Simplex: $\min Z^+ - Z^-$

s.a: $Z^+ - Z^- - x_1 + x_2 - x_3 = 0.$

$Z^+ - Z^- + x_1 + 3x_2 - x_4 = 0$

$2x_1 - x_2 + x_5 = 8$

$Z^+, Z^-, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Partiremos con la base $X_{B(1)} = x_3, X_{B(2)} = x_4$ y $X_{B(3)} = x_5$

$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Debemos armar la siguiente tabla:

$-C_B \cdot B^{-1} \cdot b$	$C - C_B \cdot B^{-1} \cdot A$
$B^{-1} \cdot b$	$B^{-1} \cdot A$

Ⓐ El valor que toma la función objetivo con las variables básicas que se están iterando.

Ⓑ La solución básica factible (valores de x_B)

Ⓒ costos reducidos.

Ⓓ Contiene las direcciones básicas.

ay que identificar: C_B , b , A , C .

$C = \begin{pmatrix} C_B \\ C_N \end{pmatrix} \rightarrow$ vector de costos, $C_B \rightarrow$ asociado a variables básicas
 $C_N \rightarrow$ asociado a " no básicas.

$\Rightarrow C_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow x_3 \\ \rightarrow x_4 \\ \rightarrow x_5 \end{matrix}$ Recordemos que x_3, x_4 y x_5 son var. de holgura y no aparecen en la función objetivo

$C_N = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow z^+ \\ \rightarrow z^- \\ \rightarrow x_1 \\ \rightarrow x_2 \end{matrix}$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¡ A encontrar los términos necesarios de la tablita!

$$\textcircled{a} -C_B \cdot B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = 0 \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{lo cual tiene} \\ \text{sentido por que} \\ x_B \text{ no esté en} \\ \text{la F.O.} \end{array}$$

$$\textcircled{b} B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow x_{B(1)} = x_3 \\ \rightarrow x_{B(2)} = x_4 \\ \rightarrow x_{B(3)} = x_5 \end{matrix}$$

$\textcircled{c} C_j - C_B \cdot B^{-1} \cdot A_j \rightarrow$ costo reducido de la variable j

$$(i) C_{z^+} - C_B \cdot B^{-1} \cdot A_{z^+} = 1 - 0 = 1$$

$$(ii) C_{z^-} - C_B \cdot B^{-1} \cdot A_{z^-} = -1 - 0 = -1$$

$$(iii) C_1 - C_B \cdot B^{-1} \cdot A_1 = 0$$

$$(iv) C_2 - C_B \cdot B^{-1} \cdot A_2 = 0$$

* ¡ Los costos reducidos de las variables básicas siempre son 0!

$$\Rightarrow C_3 = C_4 = C_5 = 0.$$

$$a) B^{-1} \cdot A = B^{-1} \cdot \begin{bmatrix} N & B \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{básicas}} \begin{bmatrix} B^{-1}N & I \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} \cdot N = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{c|cc} -C_B \cdot B^{-1} \cdot b & \bar{C}_N & \bar{C}_B = 0 \\ \hline B^{-1} \cdot b & B^{-1} \cdot N & I \end{array}$$

$\Rightarrow$ 0

		z^+	z^-	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	1	-1	0	0	0	0	0
$x_{B(1)} = x_3 \rightarrow$	0	-1	1	1	-1	1	0	0
$x_{B(2)} = x_4 \rightarrow$	0	0	1	-1	-3	0	1	0
$x_{B(3)} = x_5 \rightarrow$	8	0	0	2	-1	0	0	1

¡Tenemos el
Tableau!
Ahora podemos
iterar.

Elegimos z^- como pivote ya que es el único con costo reducido negativo. Los ratios a calcular son de la forma:

$$\frac{x_{B(i)}}{u_i} \Rightarrow (0, 0, -)$$

$\hookrightarrow$ no se calcula
porque u_i debe ser > 0 .

$\Rightarrow$ se debe elegir el
menor Ratio, en este
caso podemos elegir entre
 $x_{B(1)}$ y $x_{B(2)}$. Elegimos $x_{B(1)}$

Luego:

0	1	-1	0	0	0	0	0	0
0	-1	1	1	-1	1	0	0	0
0	0	1	-1	-3	0	1	0	0
8	0	0	2	-1	0	0	1	0

$$\begin{array}{c|ccccccc} & z^+ & z^- & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Hemos realizado la primera iteración. Ahora z^- está en la base y x_3 ha salido $\Rightarrow x_{B(1)} = z^-$. Notemos que el único costo reducido negativo es el de x_2 . Como hay ninguna dirección básica mayor que 0 en x_2 ($u_i \leq 0$) el problema solo puede ser no acotado, es decir, la sol es $-\infty$.

Calculemos la dirección:

Por Teorema de caracterización de direcciones Extremas (se cumple la hipótesis necesaria de que el poliedro está en su forma cónica).

$$d = \begin{pmatrix} B^{-1} \cdot A_j \\ c_j \end{pmatrix} \rightarrow \text{utilizaremos los valores iniciales sobre la base } B \text{ que ahora es en la que nos encontramos.}$$

$$x_{B(1)} = z^-, x_{B(2)} = x_4, x_{B(3)} = x_5$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \text{Adj}^T(B) = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} \cdot A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} -1 \rightarrow x_{B(1)} = z^- \\ -2 \rightarrow x_{B(2)} = x_4 \\ 1 \rightarrow x_{B(3)} = x_5 \end{array}$$

$$\Rightarrow d = (0, -1, 0, 1, 0, -2, 1) \rightarrow \begin{array}{l} \text{En el problema} \\ \text{original solo está} \\ x_1 \text{ y } x_2, \text{ por lo} \\ \text{tanto, nos quedamos con eso:} \end{array} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

P31

$$\min 5x_1 + x_3 - 2x_5 - x_6$$

$$2.a: \quad 5x_2 + 11x_3 + x_4 + x_5 = 10$$

$$x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 6$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1, \dots, 6.$$

a) x_1 y x_5 deben estar en la base y x_3 no. Elegimos a x_6 .
Como la variable Básica que falta.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot \text{Adj}^T(B)$$

$$\rightarrow \text{Adj}^T(B) = \begin{bmatrix} |0 & 0 & 1| & -|1 & 0 & 1| & |1 & 0 & 1| \\ -|1 & 0 & 1| & |0 & 0 & 1| & -|0 & 1 & 1| \\ |1 & 0 & 0| & -|2 & 0 & 1| & |0 & 1 & 0| \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$\Rightarrow \text{Adj}^T(B) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Veremos si es solución Básica Factible:

$$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Como $x_{B(3)}$ es negativo, x_1 , x_5 y x_6 no definen una base ya que $x_i \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, 6$.

Problemas reemplazando x_6 por x_4 .

Nota $X_{B(1)} = X_1, X_{B(2)} = X_4, X_{B(3)} = X_5$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot \text{Adj}^T(B) = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego: $B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \geq 0 \checkmark$ *si es solución
básica factible.*

b) Simplex:
$$\begin{array}{c|c} -C_B \cdot B^{-1} \cdot b & \bar{C} \\ \hline B^{-1} \cdot b & B^{-1} \cdot A \end{array}$$
 *hacemos simplex con la
fase encontrada.*

• $-C_B \cdot B^{-1} \cdot b = \underset{x_1}{(5, 0, -2)} \underset{x_4}{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}} = \underline{10 - 12 = -2}$

• $B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

• $\bar{C}_j = C_j - C_B^T \cdot B^{-1} \cdot A_j$

(i) $C_2 - (5, 0, -2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_2 = - (0, 5, -2) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = - (-25 - 2) = 2$

(ii) $C_3 - (0, 5, -2) \cdot A_3$

$= 1 - (0, 5, -2) \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - (10 - 2) = -7$

(iii) $C_6 - (0, -5, -2) \cdot A_6$

$= 1 - (0, -5, -2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

• $B^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & 11 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ El Tableau

	-2	0	27	-7	0	0	3	Ratios
$X_{B(1)} = x_1 \rightarrow 2$	2	1	-5	2	0	0	0	$\rightarrow \frac{2}{2} = 1$
$X_{B(2)} = x_4 \rightarrow 4$	4	0	4	10	1	0	-1	$\rightarrow \frac{10}{7} = 0.25$
$X_{B(3)} = x_5 \rightarrow 6$	6	0	1	1	0	1	1	$\rightarrow \frac{6}{1} = 6$

$X_{B(2)}$ Tiene el menor ratio. $\Rightarrow$ Sale x_4 , entra x_3

	-2	0	27	-7	0	0	3	
2	1	-5	2	0	0	0	0	$\leftarrow \frac{7}{10}$
4	0	4	10	1	0	-1	0	$\leftarrow -\frac{1}{5}$
6	0	1	1	0	1	1	1	$\leftarrow \frac{1}{10}$

$-2 + 4 \cdot \frac{7}{10}$	0	$27 + 4 \cdot \frac{7}{10}$	0	$\frac{7}{10}$	0	$3 - \frac{7}{10}$
$2 - 4 \cdot \frac{1}{5}$	1	$-5 - \frac{4}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
0.4	0	0.4	1	$\frac{1}{10}$	0	$-\frac{1}{10}$
$6 - \frac{4}{10}$	0	$1 - \frac{4}{10}$	0	$-\frac{1}{10}$	1	$1 + \frac{1}{10}$

	0.1	0	29.1	0	0.7	0	2.3
$X_{B(1)} = x_1$	1.2	1	-5.8	0	-0.2	0	0.2
$X_{B(2)} = x_3$	0.4	0	0.4	1	0.1	0	-0.1
$X_{B(3)} = x_5$	5.4	0	0.6	0	-0.1	1	1.1

hemos iterado una vez y ahora todos los costos reducidos son positivos $\Rightarrow$ la base encontrada es óptima:

$$X^* = (1.2, 0, 0.4, 0, 5.4, 0)$$

El dual:

$$\max 10y_1 + 2y_2 + 6y_3.$$

$$\text{s.a.:} \quad y_2 \leq 5$$

$$5y_1 - 5y_2 + y_3 \leq$$

$$11y_1 + 2y_2 + y_3 \leq$$

$$y_1 \leq$$

$$y_1 + y_3 \leq$$

$$y_3 \leq -1$$

y_1, y_2, y_3 son libres

Usamos Teorema de holgura complementaria.

$$(C_j - y^T A_j) x_j = 0 \quad \forall j \quad (\text{si } x \text{ e } y \text{ son soluciones óptimas del dual y primal respectivamente}).$$

Veamos que componentes de x son distintos de 0.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad (C_1 - y^T A_1) \cdot x_1 = 0 &\Rightarrow (5 - y^T A_1) \cdot 1.2 = 0 \\ &\Rightarrow 5 - y^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 5 - y_2 = 0 \\ x_1 \neq 0 &\Rightarrow y_2 = 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad (C_3 - y^T A_3) x_3 = 0 &\Rightarrow (1 - y^T A_3) \cdot 0.4 = 0 \\ &1 - y^T \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow 1 - 11y_1 - 2y_2 - y_3 = 0 \\ x_3 \neq 0 &1 - 11y_1 - 10 - y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = -9 - 11y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad (C_5 - y^T A_5) \cdot x_5 = 0 &\Rightarrow (C_5 - y^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \cdot 5 = 0 \Rightarrow -2 - y_1 - y_3 = 0 \\ &\Rightarrow -2 - y_1 + 9 + 11y_1 = 0 \\ &\Rightarrow 7 + 10y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = -0.7 \\ &\Rightarrow y_3 = -1.3 \end{aligned}$$

Finalmente $y^* = (-0.7, 5, -1.3)$

d) Modifiquemos el vector de costos: $C = (5, 0, 1, 0, \alpha, -1)$
donde α es el valor que puede tomar C_5 .

Queremos mantener la base óptima: $X_B = (x_1, x_3, x_5) \Rightarrow C_B^T = (1, 5, \alpha)$
Para esto los costos reducidos deben ser mayores o iguales que 0.

$$\bar{C}_B^T = C_B^T - C_B^T \cdot B^{-1} \cdot B = C_B^T - C_B^T = 0. \quad \checkmark$$

(Es importante que aquí el B es distinto al que utilizamos al usar Simplex)

$$\bar{C}_N^T = (0, 0, -1) - (1, 5, \alpha) \underbrace{\begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & -0.1 \\ 5.8 & -0.2 & 0.2 \\ 0.6 & -0.1 & 1.1 \end{bmatrix}}_{B^{-1} \cdot N}$$

$$= (\underbrace{28.6 - 0.6\alpha}_{\geq 0}, \underbrace{0.9 + 0.1\alpha}_{\geq 0}, \underbrace{-1.9 - 1.1\alpha}_{\geq 0})$$

$$\Rightarrow \alpha \leq \frac{286}{6}, \quad \alpha \cdot 0.1 \geq -0.9, \quad -1.9 \cdot \frac{1}{1.1} \geq \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha \leq \frac{143}{3}, \quad \alpha \geq -9, \quad \alpha \leq -\frac{19}{11}$$

$$\Rightarrow \alpha \in [-9, -\frac{19}{11}]$$

$$C_5 \in [-9, -\frac{19}{11}]$$