

MA3711 Optimización Matemática: Análisis Post-optimal

Héctor Ramírez C.

Consideremos un problema lineal en su forma estándar

$$\text{mín } c^t x; Ax = b, x \geq 0$$

Una vez resuelto este problema, deseamos saber que ocurre con su solución si algunos parámetros del problema cambian.

En todos los casos consideraremos el siguiente tableau óptimo ($\bar{c}_N^t \geq 0$ y $B^{-1}b \geq 0$):

0	\bar{c}_N^t	$-\bar{z}$
I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

1. Variación en coeficientes de función objetivo: c

Si c cambia a \tilde{c} , se debe recalcular \bar{c}_N^t :

$$\bar{c}_N^t = \tilde{c}_N^t - \tilde{c}_B^t B^{-1}N$$

- Si $\bar{c}_N^t \geq 0$: La solución óptima sigue siendo la misma. La función objetivo toma el valor $\tilde{c}_B^t B^{-1}b$.
- Si \bar{c}_N^t tiene una componente estrictamente negativa: Iterar con Simplex primal.

2. Variación en lado derecho: b

Si b cambia a \tilde{b} , se debe recalcular $B^{-1}b$.

- Si $B^{-1}\tilde{b} \geq 0$: La base óptima no cambia. La solución es ahora $\tilde{x} = [B^{-1}\tilde{b}|0]$ y función objetivo toma el valor $\tilde{c}_B^t B^{-1}\tilde{b}$.
- Si $B^{-1}\tilde{b}$ tiene alguna componente estrictamente negativa: Iterar con Simplex dual.

3. Introducción de nueva variable

Si se introduce una nueva variable x_{n+1} , con coeficiente c_{n+1} y columna $A_{.n+1}$, esta variable se considera no-básica y su costo reducido viene dado por:

$$\bar{c}_{n+1} = c_{n+1} - \tilde{c}_B^t B^{-1}A_{.n+1}$$

Así, el nuevo tableau será:

0	\bar{c}_N^t	\bar{c}_{n+1}	$-\bar{z}$
I	$B^{-1}N$	$B^{-1}A_{.n+1}$	$B^{-1}b$

- Si $\bar{c}_{n+1} < 0$:
 - Si $B^{-1}A_{.n+1} \leq 0$: Se produce no-acotamiento.
 - Si $B^{-1}A_{.n+1}$ tiene alguna componente estrictamente positiva: Iterar con Simplex primal.
- Si $\bar{c}_{n+1} \geq 0$: La solución sigue siendo óptima con $x_{n+1} = 0$.

4. Introducción de nueva restricción

Se agrega la restricción $d^t x \leq d_0$ (o equivalentemente $d^t x + x_{n+1} = d_0$). El problema queda de la forma:

$$\min (c^t, 0) \cdot (x, x_{n+1}); \begin{bmatrix} A & 0 \\ d^t & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix}$$

Se agrega x_{n+1} a la base, por lo que la matriz B y su inversa se calculan como sigue

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B & 0 \\ d_B^t & 1 \end{bmatrix} \\ \tilde{B}^{-1} &= \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -d_B^t B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Notemos que los costos reducidos y la función objetivo no cambian. Sin embargo, $\tilde{B}^{-1}b$ y $\tilde{B}^{-1}N$ si cambian, obteniendo:

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1}N &= \tilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} N \\ d_N^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1}N \\ d_N^t - d_B^t B^{-1}N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{-1}b &= \tilde{B}^{-1} \begin{pmatrix} b \\ d_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ d_0 - d_B^t B^{-1}b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así, el nuevo tableau será:

0	\bar{c}_N^t	0	$-\bar{z}$
I	$B^{-1}N$	0	$B^{-1}b$
0	$d_N^t - d_B^t B^{-1}N$	1	$d_0 - d_B^t B^{-1}b$

- Si $d_0 - d_B^t B^{-1}b < 0$:
 - Si $d_N^t - d_B^t B^{-1}N \geq 0$: Se produce no-acotamiento.
 - Si $d_N^t - d_B^t B^{-1}N$ tiene alguna componente estrictamente negativa: Iterar con Simplex dual.
- Si $d_0 - d_B^t B^{-1}b \geq 0$: La solución sigue siendo óptima. En la formulación estándar la nueva variable de holgura toma el valor $x_{n+1} = d_0$.

Problema 1. Considere el siguiente problema:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \mathbf{min} & -2x_1 + x_2 - x_3 \\ \mathbf{s.a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

y el siguiente tableau óptimo asociado:

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & -\bar{z} \\ \hline 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}$$

donde s_1 y s_2 representan las variables de holgura asociadas a las primera y segunda restricción, respectivamente.

(a) Explícite las soluciones de (P) y su dual. Justifique por qué estas son soluciones.

Todas las siguientes preguntas se relacionan con la solución obtenida en la parte (a).

(b) Si el costo $c_1 = -2$ cambia a $c_1 = -2 + \Delta$. Para qué valores de Δ la solución sigue siendo la misma?

(c) Suponga que los costos $c_2 = 1$ y $c_3 = -1$ cambian a $\tilde{c}_2 = -8$ y $\tilde{c}_3 = 10$, respectivamente. Determine si la base óptima cambia. En caso que así sea, determina una nueva solución de (P) y su dual.

(d) Suponga que el lado derecho de (P) se modifica de $b = (6, 4)^\top$ a $\tilde{b} = (0, \delta)^\top$. Determine la nueva solución de (P) y su dual según los distintos valores de δ .

(e) Agregue una nueva variable x_4 al problema (P), con costo asociado $c_4 = 1$ y columna en la matriz de coeficientes dada por $a_4 = (-1, 1)^\top$. Determine la nueva solución de (P) y su dual.

(f) Considere una nueva restricción $x_1 - x_3 \leq 0$. Determine si la solución encontrada en a) sigue siendo óptima. En caso que así no sea, determina una nueva solución de (P) y su dual.