MA3711 Optimización Matemática

Dualidad en Programación Lineal

Héctor Ramírez C.

1. Problema Dual

Un problema lineal (P) en su forma estándar (llamado en adelante simplemente primal) tiene como problema dual a (D) al siguiente problema de optimización:

$$(P): \begin{array}{llll} \textbf{min} & c^t x & & \\ \textbf{s.a} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad (D): \begin{array}{llll} \textbf{max} & b^t y & & \\ \textbf{s.a} & A^t y & \leq & c \\ & y & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

Proposición. *El dual de (D) es el primal (P).*

Propuesto. Muestre que para la formulaciones canónicas (P') se tiene los problemas duales dados por (D'):

$$(P'): \begin{array}{llll} \textbf{min} & c^t x & & \\ \textbf{s.a} & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad (D'): \begin{array}{llll} \textbf{max} & b^t y & & \\ \textbf{s.a} & A^t y & \leq & c \\ & y & \leq & 0 \end{array}$$

En el caso general, se tiene el siguiente cuadro:

minimización	maximización
Si la restricción es:	La variable es:
$\geq$	≥ 0
$\leq$	≤ 0
$=$	$\in \mathbb{R}$
Si la variable es:	La restricción es:
≥ 0	$\leq$
≤ 0	$\geq$
$\in \mathbb{R}$	$=$

Problema 1. *Calcule el dual del siguiente problema:*

$$\begin{array}{llllll} \textbf{\textit{min}} & 4x_1 & +6x_2 & +2x_3 & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & \geq & 4 \\ & 4x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 5 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & & & x_3 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

Solución 1. *El dual es*

$$\begin{array}{lllll} \textbf{\textit{max}} & 4y_1 & +5y_2 & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & 2y_1 & +4y_2 & \leq & 4 \\ & 3y_1 & +y_2 & \leq & 6 \\ & y_1 & -y_2 & = & 2 \\ & & y_1 & \geq & 0 \\ & & y_2 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

2. Dualidad Débil y Fuerte

Teorema (Dualidad Débil)**.** *Sea (P) un problema primal de minimización y (D) su dual, que resulta ser un problema de maximización, y consideremos x e y, puntos factibles de (P) y (D), respectivamente. Entonces $c^t x \geq b^t y$. En consecuencia,* $\operatorname{val}(P) \geq \operatorname{val}(D)$

Corolario. *Si x e y son factibles para (P) y (D), respectivamente, tales que $c^t x = b^t y$, entonces son óptimos.*

Teorema (Dualidad Fuerte)**.** *Sea (P) un problema primal de minimización y (D) su dual, que resulta ser un problema de maximización. Entonces:*

1. *Si* $\operatorname{val}(P)$ *es un valor finito entonces* $\operatorname{val}(D)$ *también lo es y* $\operatorname{val}(P) = \operatorname{val}(D)$*. Además (D) tiene solución.*

2. *Si* $\operatorname{val}(D)$ *es un valor finito entonces* $\operatorname{val}(P)$ *también lo es y* $\operatorname{val}(P) = \operatorname{val}(D)$*. Además (P) tiene solución.*

3. *Si (P) es no acotado entonces (D) es infactible.*

4. *Si (D) es no acotado entonces (P) es infactible.*

5. *Así, el único caso para el cual no se cumple dualidad fuerte es cuando (P) y (D) son infactibles. Además, (P) (o (D)) tiene solución si y sólo si es acotado y factible.*

Teorema (Holgura Complementaria)**.** *Considere (P) en su forma estándar y su dual (D):*

$$(P): \begin{array}{lccc} \textbf{\textit{min}} & c^t x & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad (D): \begin{array}{lccc} \textbf{\textit{max}} & b^t y & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & A^t y & \leq & c \end{array}$$

Se tiene que x^* e y^* son óptimos de (P) y (D), respectivamente, si y sólo si x^* es factible para (P), y^* es factible para (D) y $x_i^* s_i^* = 0$, $i = 1, ..., n$, donde $s^* = c - A^t y^*$ es el vector de holgura de (D).

Problema 2. *Resuelva el siguiente problema usando los resultados de dualidad vistos anteriormente:*

$$(P) \quad \begin{array}{lcccccc} \textbf{\textit{min}} & 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 10 & \\ & 5x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 20 & \\ & & & & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

Solución 2. *El dual viene dado por*

$$(D) \quad \begin{array}{lcccc} \textbf{\textit{max}} & 10y_1 & +20y_2 & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & 2y_1 & +5y_2 & \leq & 4 \\ & 3y_1 & +2y_2 & \leq & 1 \\ & y_1 & +y_2 & \leq & 5 \end{array}$$

Este se resuelve gráficamente, obteniendo $y_1^* = -3/11$ e $y_2^* = 10/11$, y por lo tanto $\operatorname{val}(D) = 170/11$*. Así, la solución x^* de (P), además de las igualdades en la factibilidad se debe satisfacer*

$$4x_1^* + x_2^* + 5x_3^* = 170/11.$$

Estas tres ecuaciones lineales nos entregan un único punto $x_1^* = 40/11$, $x_2^* = 10/11$ y $x_3^* = 0$. Notemos también que la condición $x_3^* = 0$ se obtiene directamente de la holgura complementaria.

		(P) factible		(P) infactible
		(P) tiene solución	(P) no acotado	
(D) factible	(D) tiene solución	dualidad fuerte val(P)=val(D) finito	imposible	imposible
	(D) no acotado	imposible	imposible	dualidad fuerte val(P)=val(D)=infinito
(D) infactible		imposible	dualidad fuerte val(P)=val(D)=-infinito	patológico val(P)=infinito val(D)=-infinito