MA3711 Optimización Matemática: Algoritmo Simplex

Héctor Ramírez

Consideremos un problema lineal escrito en forma estándar:

$$\min\ c^t x \quad ; \quad Ax = b,\ x \geq 0$$

Para una descomposición $A = [B|N]$, con B matriz de $n \times n$ invertible (base), asociada a un punto extremo $\bar{x} = [\bar{x}_B|\bar{x}_N] = [B^{-1}b|0]$, se reescriben los costos $c = [c_B|c_N]$ y se descompone la variable de decisión $x = [x_B|x_N]$. Consideremos entonces el problema reescrito de la forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & (c_N^t - c_B^t B^{-1} N) x_N + c_B^t B^{-1} b \\ \text{s.a} \quad & x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ & x_N \geq 0 \\ & x_B \geq 0 \end{aligned}$$

Recordemos finalmente el *vector de costos reducidos*: $\bar{c}_N^t = c_N^t - c_B^t B^{-1} N$.

Algorithm 1 Simplex

Dado un punto extremo del poliedro $\bar{x} = [\bar{x}_B|\bar{x}_N] = [B^{-1}b|0]$
El problema se puede ver de la forma (tableau):

$$\begin{array}{cc|c} 0 & \bar{c}_N^t & -c_B^t B^{-1} b \\ \hline I & B^{-1}N & B^{-1}b \end{array}$$

el cual por comodidad denotamos por:

$$\begin{array}{c|c} \bar{c}^t & -\bar{z} \\ \hline \bar{A} & \bar{b} \end{array}$$

iteración
    si $\bar{c}_N^t \geq 0$
        El **óptimo** es $\bar{x} = [B^{-1}b|0]$
        parar iteración

    si $\exists (\bar{c}_N^t)_j < 0$ y la columna correspondiente tiene solamente números negativos o ceros
        El problema es **no acotado**
        parar iteración

    si $\exists (\bar{c}_N^t)_j < 0$ y la columna correspondiente tiene algún número mayor estricto que cero
        Si x_s es la variable de la columna respectiva, se le hace entrar a la base, sacando $(x_B)_r$, con r tal que:

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{r,s}} = \min_{\bar{a}_{i,s} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,s}} \right\}$$

        Pivotear en (r,s) para sacar $(x_B)_r$ e ingresar x_s:

$$\begin{aligned} \bar{b}_i \to \bar{b}_i - \bar{b}_r \frac{\bar{a}_{i,s}}{\bar{a}_{r,s}}, \quad \bar{a}_{i,j} \to \bar{a}_{i,j} - \bar{a}_{i,s} \frac{\bar{a}_{r,j}}{\bar{a}_{r,s}} \quad & \text{si } i \neq r\,; \quad \bar{c}_j \to \bar{c}_j - \bar{c}_s \frac{\bar{a}_{r,j}}{\bar{a}_{r,s}} \\ \bar{b}_i \to \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{r,s}}, \quad \bar{a}_{i,j} \to \frac{\bar{a}_{r,j}}{\bar{a}_{r,s}} \quad & \text{si } i = r\,; \quad -\bar{z} \to -\bar{z} - \bar{c}_s \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{r,s}} \end{aligned}$$

fin iteración

Problema 1. *Resolver el siguiente problema usando el método simplex:*

$$\begin{array}{rrrcl} \textbf{\textit{minimizar}} & c_1x_1 & +c_2x_2 & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & -x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ & -2x_1 & +x_2 & \leq & 1 \\ & & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

para $c = (-1,0)^t$*,* $c = (1,-1)^t$ *y* $c = (0,-1)^t$*.*

Solución 1. *Al escribir el problema en su forma estándar, agregando las variables de holgura* x_3, x_4*, se obtiene el primer Tableau:*

$$\begin{array}{cccc|c} c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Este ya se encuentra en la forma:

$$\begin{array}{cc|c} 0 & \overline{c}_N^t & -c_B^t B^{-1}b \\ \hline I & B^{-1}N & B^{-1}b \end{array}$$

donde identificamos a las variables de holgura x_3, x_4 *como variables básicas. Notemos que en este caso la solución básica factible es* $\bar{x} = (0,0,2,1)^t$*.*

Consideremos primero $c = (-1,0)^t$*. En este caso el Tableau inicial viene dado por:*

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Así, en la primera iteración vemos que se cumple el criterio de no acotamiento de la línea 9 en la primera columna del Tableu. Luego, el problema es no acotado e identificamos la dirección extrema responsable como $\bar{d} = (1,0,1,2)^t$*, es decir*

$$d_1 = 1\,; \qquad d_2 = 0$$

para el problema original. Notemos que el problema es no acotado para cualquier $c_1 < 0$ *con la misma dirección de no acotamiento.*

Consideremos ahora $c = (1,-1)^t$*. En este caso el Tableau inicial viene dado por:*

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Comencemos a iterar:

- *Iteración 1:*
  - *Se satisface condición de línea 14, para la columna 2. Entra* x_2 *a la base.*
  - $\displaystyle\min_{a_{i,2}>0}\left\{\frac{b_2}{a_{i,2}}\right\} = \frac{b_2}{a_{2,2}}$.
    Se pivotea en $(2,2)$*. Sale la variable básica asociada a la segunda coordenada:* x_4*.*
  - *Tableau:*

$$\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

- *Iteración 2:*
  - *Se satisface condición de línea 14, para la columna 1. Entra* x_1 *a la base.*
  - $\displaystyle\min_{a_{i,1}>0}\left\{\frac{b_1}{a_{i,1}}\right\} = \frac{b_1}{a_{1,1}}$.
    Se pivotea en $(1,1)$*. Sale la variable básica asociada a la primera coordenada:* x_3*.*
  - *Tableau:*

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}$$

- *Iteración 3:*
  - *Se satisface condición de línea 5. El valor óptimo de la función objetivo es -2 y el vector solución es:*

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 3 \\ x_3, x_4 &= 0 \end{aligned}$$

  - *Parar iteración*

Para terminar, consideremos el caso $c = (0, -1)^t$. En este caso el Tableau inicial viene dado por:

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Comencemos a iterar:

- *Iteración 1:*
  - *Se satisface condición de línea 14, para la columna 2. Entra x_2 a la base.*
  - $\min_{a_{i,2}>0} \left\{ \frac{b_2}{a_{i,2}} \right\} = \frac{b_2}{a_{2,2}}$.
    Se pivotea en $(2, 2)$. Sale la variable básica asociada a la segunda coordenada: x_4.
  - *Tableau:*

$$\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

- *Iteración 2:*
  - *Se satisface condición de línea 14, para la columna 1. Entra x_1 a la base.*
  - $\min_{a_{i,1}>0} \left\{ \frac{b_1}{a_{i,1}} \right\} = \frac{b_1}{a_{1,1}}$.
    Se pivotea en $(1, 1)$. Sale la variable básica asociada a la primera coordenada: x_3.
  - *Tableau:*

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}$$

- *Iteración 3:*
  - *Se satisface condición de línea 9. El problema es no acotado y la dirección extrema responsable es:*

$$\begin{aligned} d_1 &= 1 \\ d_2 &= 1 \\ d_3 &= 0 \\ d_4 &= 1 \end{aligned}$$

  - *Parar iteración*

Observación 1. *El algoritmo SIMPLEX puede iterar cíclicamente si la solución básica factible es degenerada, es decir, si* $\bar{x} = [\bar{x}_B|\bar{x}_N] = [B^{-1}b|0]$ *es tal que* $B^{-1}b$ *tiene alguna componente nula. Para evitar esto, se puede utilizar* **regla de Bland***:*

1. *Elegir en la línea 13 la variable no básica de menor índice (es decir, la columna más a la izquierda en el Tableau) entre las que tengan costo reducido estrictamente negativo.*
2. *Si, en la línea 14, hay más de una fila que minimiza el cuociente* $\bar{b}_i/\bar{a}_{i,s}$ *para* $\bar{a}_{i,s} > 0$*, entonces elegir la variable básica con menor índice (es decir, la fila más arriba en el Tableau).*

Problema 2. *Resolver el siguiente problema usando el método simplex:*

$$\begin{array}{rrrrcl}
\textbf{\textit{minimizar}} & x_1 & +x_2 & -4x_3 & & \\
\textbf{\textit{s.a}} & x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq & 9 \\
 & x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq & 4 \\
 & & & x_i & \geq & 0
\end{array}$$

Solución 2. *Como se pide minimizar, no es necesario hacer el cambio maximizar* $c^t x \Leftrightarrow -$*minimizar* $-c^t x$*. Poner el problema en forma estándar: (*x_4, x_5, x_6 *son variables de holgura)*

$$\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 9 \\
1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
-1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4
\end{array}$$

El problema ya se encuentra en la forma:

$$\begin{array}{cc|c}
0 & \bar{c}_N^t & -c_B^t B^{-1} b \\ \hline
I & B^{-1}N & B^{-1}b
\end{array}$$

Comencemos a iterar:

- *Iteración 1:*
  - *Se satisface condición de línea 14, para la columna 3. Entra* x_3 *a la base.*
  - $\min\limits_{a_{i,3}>0} \left\{ \dfrac{b_3}{a_{i,3}} \right\} = \dfrac{b_3}{a_{3,3}}$.
    Se pivotea en $(3,3)$.
    Sale la variable básica asociada a la tercera coordenada: x_6.
  - *Tableau:*

$$\begin{array}{cccccc|c}
-3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 4 & 16 \\ \hline
3 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\
-1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4
\end{array}$$

- *Iteración 2:*
  - *Se satisface condición de línea 14, para la columna 1. Entra* x_1 *a la base.*
  - $\min\limits_{a_{i,1}>0} \left\{ \dfrac{b_1}{a_{i,1}} \right\} = \dfrac{b_1}{a_{1,1}}$.
    Se pivotea en $(1,1)$.
    Sale la variable básica asociada a la primera coordenada: x_4.
  - *Tableau:*

$$\begin{array}{cccccc|c}
0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 & 17 \\ \hline
1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 1/3 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\
0 & 2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 13/3
\end{array}$$

- *Iteración 3:*
  - *Se satisface condición de línea 5. El valor óptimo de la función objetivo es* -17 *y el vector solución es:*

$$\begin{aligned} x_1 &= 1/3 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 13/3 \end{aligned}$$

  - *Parar iteración*

Problema 3. *Resolver el siguiente problema usando el método simplex:*

$$\begin{array}{cccccc} \textbf{\textit{maximizar}} & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & & \\ \textbf{\textit{s.a}} & 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & \leq & 3 \\ & -x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq & 5 \\ & & & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

Solución 3. *Como se pide maximizar, es necesario hacer el cambio maximizar* $c^t x \Leftrightarrow -$*minimizar* $-c^t x$. *Poner el problema en forma estándar: (*x_4, x_5 *son variables de holgura)*

$$\begin{array}{ccccc|c} -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -3 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

Comencemos a iterar:

- *Iteración 1:*
  - *Se satisface condición de línea 14, para la columna 1. Entra* x_1 *a la base.*
  - $\min_{a_{i,1}>0} \left\{ \dfrac{b_1}{a_{i,1}} \right\} = \dfrac{b_1}{a_{1,1}}$.
    Se pivotea en $(1,1)$.
    Sale la variable básica asociada a la primera coordenada: x_4.
  - *Tableau:*

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & -13/2 & 2 & 3/2 & 0 & 9/2 \\ \hline 1 & -3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & -1/2 & 2 & 1/2 & 1 & 13/2 \end{array}$$

- *Iteración 2:*
  - *Se satisface condición de línea 9, para la columna 2.*
  - *El problema es no acotado.*