

Aux #2

(M) Primero notemos que cada objeto que Josuke tiene puede entrar o no a la mochila, esto significa que podemos caracterizar el estado de la mochila con un vector de ceros y unos $\vec{x} \in \{0,1\}^n$.

$\vec{x} = (0,1,1,\dots)$ indica si el i -ésimo objeto de la lista se encuentra o no en la mochila.

Este vector me servirá para guardar la información de que objetos guardo.

Tengo también $\vec{b}$ el vector de beneficios

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y $\vec{c}$ el de los pesos

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0.2 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Notemos que dada una configuración $\vec{x}$ de la mochila, su peso es

$$\vec{x} \cdot \vec{c} = x_1 \overset{c_1}{\cdot} + x_2 \overset{c_2}{\cdot} + \dots + x_m \overset{c_m}{\cdot}$$

donde m es el número total de los tipos de objetos.

se debe cumplir que

$$\vec{x} \cdot \vec{c} = x^t \cdot c \leq 5$$

y que claro $x_i \in \{0,1\} \quad \forall i=1,\dots,m$.

La Función que queremos maximizar es el beneficio

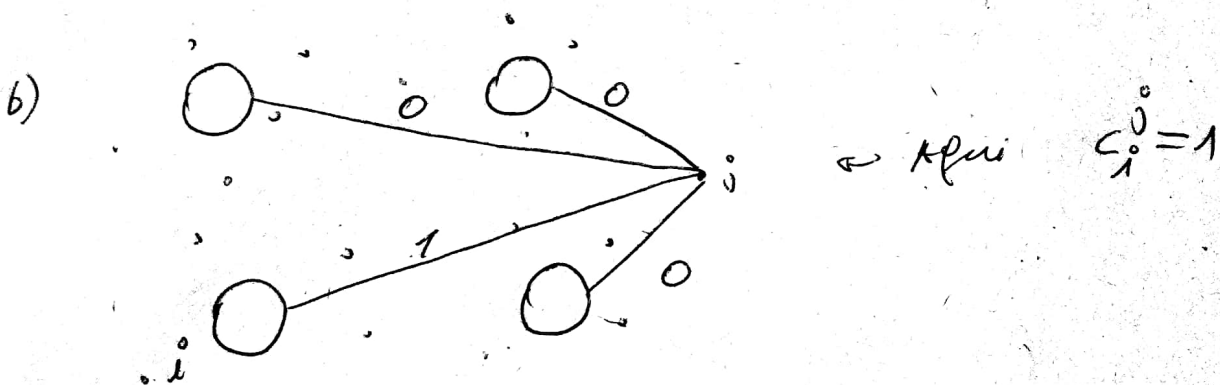
$$\text{beneficio} = x_1 \cdot b_1 + x_2 \cdot b_2 + \dots + x_n \cdot b_n = b^t x$$

obtenemos $\max b^t x$

$$\text{s.t. } c^t x \leq 5$$

$$x \in \{0,1\}^n$$

donde $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0.2 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$



Veamos que las variables que nosotros decidimos son si abrimos o no las pizzerías, asumiendo que hay un total de n pizzerías, ~~las~~ escribiremos $x \in \{0,1\}^n$ un vector que represente a las pizzerías que se encuentran abiertas y cerradas.

Por otro lado tenemos a los clientes que son las comunas que pueden o no abastecerse de la

i -ésima ~~comuna~~ pizzeria. Si suponemos que hay m comunas, guardaremos el hecho de que la comuna j compre en la pizzeria i como la variable binaria C_{ij} .

Restricciones

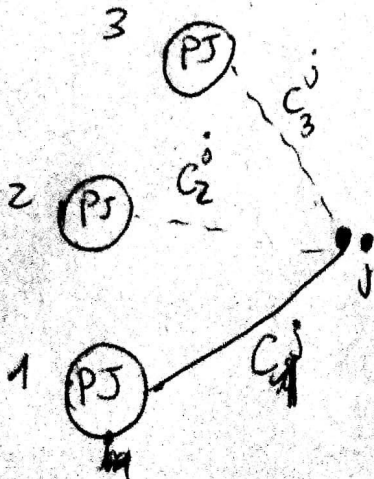
• Si una pizzeria está cerrada no puede abastecer a ninguna comuna.
 Esto es $X_i = 0 \Rightarrow C_{ij} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$.

Dado que tanto X_i como C_{ij} son de valores 0 o 1 esto último equivale a:

$$C_{ij} \leq X_i \quad \forall j = 1, \dots, m$$

(Basta observar que se cumple cuando $X_i = 0$ y que también cuando $X_i = 1$)

• Cada comuna debe ser abastecida, esto quiere decir que, si ~~se~~ fijamos un j , es decir, si miramos una comuna, Al menos debe estar siendo abastecida por una pizzeria, es decir Al menos un C_{ij} debe ser 1. Esto lo podemos capturar como



$$\sum_{i=1}^m C_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, m$$

cada comuna compra a una única pizzeria.

Finalmente, veamos la función que queremos maximizar:

$$f_{\text{AMANCIAS}} = \text{Ingresos} - \text{Inversión}.$$

AX

Ingresos:

Consideremos b_i^j como el beneficio que tiene que la comuna j compra en la pizzeria i .

Una comuna j generaría un ingreso total de

$$\sum_{i=1}^m c_i^j b_i^j$$

sumando sobre todas las comunas:

$$\text{Ingresos} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_i^j b_i^j$$

Inversión

mientras que la inversión quedaría:

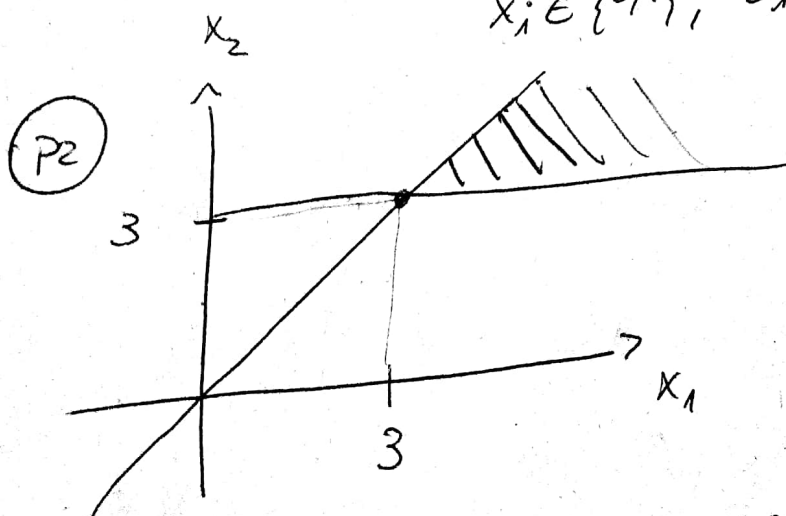
Considerando f_i el costo de abrir la i -ésima Pizzeria, el costo asociado a una cierta forma X de ubicar las pizzerias es:

$$\text{Costo} = \sum_{i=1}^m X_i \cdot f_i$$

Finalmente el problema queda.

$$\max \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n C_i^j b_i^j - \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} C_i^j \leq x_i & \forall j=1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^n C_i^j = 1 & \forall j=1, \dots, m \\ x_i \in \{0,1\}, C_i^j \in \{0,1\} \end{cases}$$



Notemos que el qto cumple

$$\left. \begin{array}{l} x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq x_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 - x_2 \leq 0 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \end{array} \left\} \begin{array}{l} 0 \cdot x_1 - x_2 \leq -3 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \end{array}$$

Poliedro con $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

Postulamos que $(3,3)$ es punto extremo
 como comb. convexa de pto extremo es que no puede ser escrito
 como comb. convexa de pto distintos $\neq$ a el.

Suponemos que es comb convexa de $y, z \in \text{Poliedro}$

$$(3,3) = \lambda(y_1, y_2) + (1-\lambda)(z_1, z_2)$$

$$= (\lambda y_1 + (1-\lambda)z_1, \lambda y_2 + (1-\lambda)z_2)$$

Por la def del poliedro tenemos que
 $z_1 \geq 3, y_1 \geq 3$ y $z_2 \geq 3, y_2 \geq 3$.

$$\Rightarrow \text{Ambos } z_1, z_2 \geq 3, y_1, y_2 \geq 3.$$

tengo así la combinación convexa

$\lambda y_i + (1-\lambda)z_i$ de dos números
 mayores o iguales a 3.

Suponemos que uno de ellos es mayor a 3.
 si $y_i > 3$

$$\lambda y_i + (1-\lambda)z_i > \lambda \cdot 3 + (1-\lambda)3 = 3$$

$\Rightarrow$ si uno de los dos es mayor que 3, la
 comb es mayor a 3. Por lo cual se debe cumplir
 $y = z = (3,3) \Rightarrow (3,3)$ es punto extremo

b) $C_{\text{circulo}} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \}$



El procedimiento que seguiremos es demostrar que hay infinitos puntos extremos y veremos que suponer que es poliedro necesariamente implica tener finitos puntos extremos.

mostremos que todos los pto del contorno son
 puntos extremos. $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$
 supongamos es comb. convexa de otros los puntos.

$$(x_1, x_2) = \lambda(y_1, y_2) + (1-\lambda)(z_1, z_2)$$

$$= (\lambda y_1 + (1-\lambda)z_1, \lambda y_2 + (1-\lambda)z_2) \quad (\star)$$

• notemos que Al menos uno de los dos pto, o y o z
 poseen norma 1. si Ambos tienen menos, se obtendría.
 $\lambda \|y\| + (1-\lambda)\|z\| < 1$.

Luego, si calculamos la norma de $(\star)$ obtenemos

$$1 \stackrel{?}{=} \lambda^2(y_1^2 + y_2^2) + 2\lambda(1-\lambda)(y_1 z_1 + y_2 z_2) + (1-\lambda)^2(z_1^2 + z_2^2)$$

que tiene como únicas soluciones $\lambda=0$ y $\lambda=1$

Por lo cual $x=y$ v $x=z$, por lo que no puede
 ser escrito como comb. convexa de puntos distintos
 a x . $\Rightarrow x$ pto extremo. $\Rightarrow$ existen infinitos
 pto extremos.

supongamos ahora que el círculo es poliedro,
 es decir, tiene la forma $AX \leq b$ con $A \in M^{m \times n}(\mathbb{R})$

Por el teorema de caracterización de pts
extremos.

x pto extremo $\Leftrightarrow$ ~~tenemos~~ B submatriz
invertible de A y

$$B^{-1}b = x$$

(salvo un reordenamiento)

Dado que $A \in M^{n \times m}(\mathbb{R})$ solo existen finitas submatrices
 $\Rightarrow$ existen finitos pts extremos.

$\rightarrow \leftarrow$
contradicción

luego, el círculo no es poliedro.