

Pauta Auxs

P11 $\min x_1 - x_2$

2.a: $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 0$

$3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq 0$

$-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6$

$x_1 \leq 0$

$x_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0$

x_4 libre

Interpretemos cada elemento del problema

$C = (1, -1, 0, 0) \rightarrow$ vector de costos

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ matriz de coeficientes
 a_1 será una fila y A_1 una columna.

$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ vector b de restricciones

de modo que el problema se puede representar:

$\min C^T x$

2.a $a_1^T x \leq 0$

$a_2^T x \geq 0$

$a_3^T x = 6$

$x_1 \leq 0$

$x_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0$

Recordemos que para un problema

(P) $\min C^T x$ $\xrightarrow[\text{dual}]{\text{m}}$ $\max b^T y$
 2.a $Ax \leq b$ $x \geq 0$ $A^T y \leq 0$ $y \geq 0$

* podemos usar la tablita del resumen.

* OJO que el término $Ax = \begin{bmatrix} a_1^T x \\ a_2^T x \\ \vdots \\ a_m^T x \end{bmatrix} \rightarrow$ se multiplican los filas con el vector

y en $A^T y = \begin{bmatrix} A_1 y \\ A_2 y \\ \vdots \\ A_n y \end{bmatrix}$ suponiendo que la matriz A es $n \times m$

scribiendo todo esto podemos obtener el dual:

① si el Primal es de minimización, el dual es de maximización. $\min C^T x \rightarrow \max b^T y$

en el problema: $\min x_1 - x_2 \rightarrow \max 6 y_3$

② Toda Restricción en el primal (no de la forma $x_i \leq 0$) induce una variable en el dual.

$$\begin{array}{lcl} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 0 & \longrightarrow & y_1 \leq 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq 0 & \longrightarrow & y_2 \geq 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 & \longrightarrow & y_3 \text{ libre} \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ver.} \\ \text{Table} \end{array}$$

③ Toda variable en el primal induce una restricción en el dual.

$$\begin{array}{lcl} x_1 \leq 0 & \longrightarrow & A_1 y = C_1 \Rightarrow 2y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 1 \\ x_2 \geq 0 & \longrightarrow & A_2 y = C_2 \Rightarrow 3y_1 + y_2 - y_3 \leq -1 \\ x_3 \geq 0 & \longrightarrow & A_3 y = C_3 \Rightarrow -y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 0 \\ x_4 \text{ libre} & \longrightarrow & A_4 y = C_4 \Rightarrow y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \end{array}$$

Ya tenemos todo lo necesario para formular el dual!

* Observación: habitualmente el paso ① se hace al final por que no sabemos cuantas variables hay en el dual.

(D)

max

$6y_3$

2.a

$$2y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 1$$

$$3y_1 + y_2 - y_3 \leq -1$$

$$-y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 0$$

$$y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$$

$$y_1 \leq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

y_3 libre

P2)

1. $A \in S^n$ ($A^T = A$), 2.a: $(P) \min C^T x$
 $Ax \geq C$
 $x \geq 0$

si x^* satisface $Ax^* = C$ y $x^* \geq 0 \Rightarrow x^*$ es óptimo.

sol: Calculemos su dual: (D) max $C^T y$
2.a $A^T y \leq C$
 $y \geq 0$

pero como $A \in S^n$

(D) max $C^T y$ notemos que x^* es factible
 $Ay \leq C$ en ambos problemas
 $y \geq 0$

Luego, por dualidad débil:

$$C^T y \leq C^T x \quad \forall x \in (P), \forall y \in (D)$$

En particulares problemas tenemos $\dots = \dots$

$$\Rightarrow c^T x^* \leq c^T x \quad \forall x \in P$$

lo que es la definición de óptimo.

* notemos que no dualidad fuerte, x es también óptimo en el dual.

2. Sea el problema
$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

sea x^* óptimo en el primal y p^* óptimo en el dual.

a) sea $\bar{x}$ sol. óptima cuando reemplazamos c por $\bar{c}$.
Mostremos que: $(\bar{c} - c)^T (\bar{x} - x^*) \leq 0$.

sol: Sean los problemas:

$$\begin{array}{ll} (P) \min c^T x & (\bar{P}) \min \bar{c}^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Podemos tomar el poliedro $P = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ que define el conjunto factible de ambos problemas.

$$\begin{array}{ll} (P) \min c^T x & (\bar{P}) \min \bar{c}^T x \\ \text{s.t.} & x \in P \end{array}$$

Luego:

Como x^* es óptimo de (P)

$$c^T x^* \leq c^T x \quad \forall x \in P$$

en particular: $C^T x^* \leq C^T \bar{x}$ (1)

Por otro lado, Como $\bar{x}$ es óptimo de $(\bar{P})$

$$\bar{C}^T \bar{x} \leq \bar{C}^T x \quad \forall x \in P$$

en particular: $\bar{C}^T \bar{x} \leq \bar{C}^T x^*$ (2)

sumando (1) y (2) se obtiene:

$$C^T x^* + \bar{C}^T \bar{x} \leq C^T \bar{x} + \bar{C}^T x^*$$

$$\Leftrightarrow C^T x^* + \bar{C}^T \bar{x} - C^T \bar{x} - \bar{C}^T x^* \leq 0$$

$$C^T (x^* - \bar{x}) + \bar{C}^T (\bar{x} - x^*) \leq 0$$

$$C^T (x^* - \bar{x}) - \bar{C}^T (x^* - \bar{x}) \leq 0$$

$$\Rightarrow (C - \bar{C})^T (x^* - \bar{x}) \leq 0 \quad \Leftrightarrow (\bar{C} - C)^T (\bar{x} - x^*) \leq 0$$

b) se cambia b por $\bar{b}$ y se obtiene $\bar{x}$ como óptimo.

mostremos que: $p^* (\bar{b} - b) \leq C^T (\bar{x} - x^*)$

sol: sean los problemas:

$$(P_1) \min C^T x$$

s.a $Ax = b$

$x \geq 0$

$$(D_1) \max b^T p$$

s.a $A^T p \leq C$

p libre

$$(P_2) \min C^T x$$

s.a $Ax = \bar{b}$

$x \geq 0$

$$(D_2) \max \bar{b}^T p$$

s.a $A^T p \leq C$

p libre

Como existe óptimo en P_2 , $\bar{x}$ (no dualidad fuerte).
También existe óptimo en D_2 :

$$\Rightarrow \bar{b}^T \bar{p} = c^T \bar{x} \quad (1) \quad (\bar{p} \text{ óptimo en } D_2),$$

Además, p^* que es óptimo en D_1 , y factible en D_2 pues cumple las restricciones.

$$\Rightarrow \bar{b}^T \bar{p} \geq \bar{b}^T p^* \quad (2) \quad (\text{ya que } \bar{p} \text{ es óptimo de } D_2)$$

$$\text{de (1) y (2): } \bar{b}^T p^* \leq c^T \bar{x}$$

restando el término $b p^*$ a ambos lados:

$$\bar{b}^T p^* - b p^* \leq c^T \bar{x} - b p^*$$

pero por dualidad fuerte tenemos que $b p^* = c^T x^*$

$$\Rightarrow \bar{b}^T p^* - b p^* \leq c^T \bar{x} - c^T x^*$$

$$\Leftrightarrow (\bar{b} - b)^T p^* \leq c^T (\bar{x} - x^*) \quad \text{—}$$

P3)

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 - x_2 = 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolver con Simplex

(i) Pasar a forma canónica (estándar).

- a cada desigualdad le añado una variable de holgura y le cambio a igualdad (si es $\leq$ la variable se suma, si es $\geq$ se resta).
- las variables inestrictas se transformen a 2 una con coeficiente positiva y otra negativa.
Ej: si x_i es libre: $x_i = x_i^+ - x_i^-$, $x_i^+, x_i^- \geq 0$
- Todas las variables deben ser positivas!

$$\begin{aligned} (P) \quad \min \quad & 2x_1 + x_2^+ - x_2^- \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 - x_2^+ + x_2^- = 3 \\ & x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- + x_3 = 5 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2^+ \geq 0 \\ & x_2^- \geq 0 \\ & x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Ahora hacemos el Tableau, debe ser de la forma:

$-C_B X_B$	$\bar{C}_1 \dots \bar{C}_n$
$x_{B(1)}$	$B^{-1}A_1$
$\vdots$	$\vdots$
$x_{B(m)}$	$B^{-1}A_m$

Elegimos las variables x_1 y x_2 para la base

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Luego: } x_B = B^{-1} \cdot b = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/7 \\ 12/7 \end{pmatrix}$$

Costos reducidos: Los de las variables básicas siempre son 0.

$$\begin{aligned} \bar{C}_3 &= C_3 - C_B \cdot B^{-1} A_3 = -1 - (2, 1) \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= -1 - (3/7, 5/7) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 - (3/7 - 10/7) \\ &= -1 - (-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_4 &= C_4 - C_B \cdot B^{-1} A_4 = -2 - (2, 1) \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -5/7 \\ &+ C_B^T \cdot x_B = (2, 1) \begin{pmatrix} 11/7 \\ 12/7 \end{pmatrix} = 34/7 \end{aligned}$$

Rellenamos la Tabla:

$$\textcircled{1} \begin{array}{c|cccc} -34/7 & 0 & 0 & 0 & -5/7 \\ \hline 11/7 & 1 & 0 & 0 & 1/7 \\ 12/7 & 0 & 1 & -1 & 3/7 \end{array}$$

$$+ B^{-1} \cdot A_3 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$+ B^{-1} \cdot A_4 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}$$

$$\frac{x_{B(i)}}{u_i} = 11$$

$$\frac{x_{B(i)}}{u_i} = \textcircled{4} \rightarrow \text{mínimo}$$

Se procede así: Buscamos alguna columna con $\bar{C}_j$ negativo, la elegimos (puede ser cualquiera), luego, el vector bajo los costos será el vector u . Computamos los valores $\frac{x_{B(i)}}{u_i}$, para todo i t.q: $u_i > 0$ (si todos son negativos, el problema es no acotado) y elegimos el i t.q $\frac{x_{B(i)}}{u_i}$ sea el mínimo entre todos. i corresponde a la columna pivote (x_i entra a la base) y la fila i , la fila pivote ($x_{B(i)}$ sale).

Luego pondremos y sumaremos la fila i (la misma que siempre estara) de modo que el vector u sea un vector canónico E_i (1 en la componente i , el resto 0) y el costo reducido c_j sea 0.

Para el Tableau (1) la columna pivote es $j=7$ y la fila pivote $i=2$.

$$\begin{array}{c|cccc}
 -3\frac{4}{7} & 0 & 0 & 0 & -5/7 \\
 1\frac{1}{7} & 1 & 0 & 0 & 1/7 \\
 4\frac{2}{7} & 0 & 1 & -1 & 3/7
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \leftarrow (\cdot 5/3) \\
 \leftarrow (\cdot -1/3) \\
 \leftarrow (\cdot 7/3)
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cccc}
 -3\frac{4}{7} + \frac{4\frac{2}{7} \cdot 5}{7} & 0 & 5/3 & -5/3 & 0 \\
 1\frac{1}{7} - \frac{12}{7}(-1/3) & 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\
 4 & 0 & 7/3 & -7/3 & 1
 \end{array}$$

$$\Rightarrow (2) \begin{array}{c|cccc}
 -14/7 & 0 & 5/3 & -5/3 & 0 \\
 1 & 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\
 4 & 0 & 7/3 & -7/3 & 1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 (\cdot 5) \\
 (\cdot 3) \\
 (\cdot 7)
 \end{array}
 \rightarrow \frac{1}{1/3} = 3$$

El negativo es que no se considera

$$\begin{array}{c|cccc}
 -14/7 + 5 & 5 & 5/3 & 0 & 0 \\
 3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\
 7 + 4 & 7 & 7/3 & 7/3 & 1
 \end{array}$$

	x_1	x_2^1	x_2^-	x_3
3	5	0	0	0
3	3	-1	1	0
11	7	0	0	1

la sol. óptima. $\rightarrow X = (0, 0, 3, 14)$
 $\quad \quad \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

Trasladando lo sol al problema original:

$$x = (0, -3) \rightarrow x_2 = x_2^+ - x_2^- = 0 - 3$$

y Tomo el valor de -3 .

b) El dual:

(D) $\max \quad 3y_1 + 5y_2$
 $3y_1 + y_2 \leq 2$
 $-y_1 + 2y_2 = 1$
 y_1 libre
 $y_2 \leq 0$

Para obtener la solución óptima del dual utilizamos holgura complementaria.

El teorema dice que: Si x e y son óntimos, primero y deud respectivamente:

$$y_i^T (b - a_i x) = 0 \quad \forall i, \quad (c_j^T - A_j^T y) x_j^T = 0$$

¿Cómo lo usamos? para cada caso, debemos buscar elementos de la solución que ya conocemos que sean distintos de 0. Así, imponemos que el otro elemento que se este multiplicando debe ser 0 y obtenemos ecuaciones.

$$\text{Como } x_2 \neq 0 : (C_2 - A_2^T y) \underbrace{x_2}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow C_2 - A_2^T y = 0$$

$$\text{entonces: } 1 - (y_1 + 2y_2) = 0 \Rightarrow 1 + y_1 - 2y_2 = 0 \quad (1) \\ \Rightarrow y_1 = 2y_2 - 1$$

nos falta otra ec. Notemos que la restricción $x_1 + 2x_2 \leq 5$ no se cumple estrictamente.

$$\Rightarrow 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) \leq 5$$

$$\Rightarrow y_2 (b - a_2 x) = 0 \Rightarrow y_2 (\underbrace{5 + 6}_{\neq 0}) = 0 \\ \Rightarrow y_2 = 0$$

$$\Rightarrow (1) \quad 1 + y_1 \overset{0}{\Rightarrow} \cancel{2y_2} = 0 \Rightarrow y_1 = -1$$

$$\Rightarrow \text{La sol del dual es: } y = (-1, 0)$$