Auxiliar 5

Dualidad

Prof: Jorge Amaya
Auxiliar: Diego Reyes Troncoso, Javier Monreal Bernal

Pregunta 1

Sea el problema de Programación Lineal:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 - x_2 \\ \text{subject to} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 0 \\ & 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq 0 \\ & -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Escribir el dual del Problema.

Pregunta 2

1. Sea $A \in S^n$, considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{subject to} & Ax \geq c \\ & x \geq 0 \end{array}$$

   Probar que si x^* satisface $Ax = c$ y $x^* \geq 0$, entonces x^* es una solución óptima.

2. Sea el problema de progrmación lineal de minimizar $c^T x$ sujeto a que $Ax = b$, $x \geq 0$. Sea x^* la solución óptima (que se asume que existe) y sea p^* el óptimo del problema dual.

   (a) Sea $\bar{x}$ la solución óptima del primal cuando c es reemplazado por $\bar{c}$.
   Muestre que $(\bar{c} - c)^T (\bar{x} - x^*) \leq 0$.

   (b) Sea el vector de costos fijo en c pero ahora se cambia b por $\bar{b}$ y sea $\bar{x}$ el óptimo del primal.
   Probar que $(p^*)^T (\bar{b} - b) \leq c^T (\bar{x} - x^*)$.

Pregunta 3

Sea el problema de minimización:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{subject to} \quad & 3x_1 - x_2 = 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Resuelva usando simplex.

(b) Obtenga el problema dual y calcule la solución óptima del dual. Verifique que se cumple dualidad fuerte.

Resumen

1. Tablita para sacar duales:

Primal	min	max	Dual
restricciones	$\geq b_i$ $\leq b_i$ $=b_i$	≥ 0 ≤ 0 free	variables
variables	≥ 0 ≤ 0 free	$\leq c_j$ $\geq c_j$ $=c_j$	restricciones

2. ***Teorema*** *(Dualidad Débil):* Si x es una solución **factible** del problema primal y p es solución **factible** del problema dual, entonces:

$$p^T b \leq c^T x \tag{1}$$

3. ***Teorema*** *(Dualidad Fuerte):* Si x es solución **óptima** del problema primal y p es solución **óptima** del problema dual, entonces:

$$p^T b = c^T x \tag{2}$$

4. ***Teorema*** *(Holgura Complementaria):* Sean x y p soluciones factibles de un problema primal y su dual, respectivamente. Los vectores x y p son **óptimos** si y sólo si:

$$p_i(a_i^T - b_i) = 0, \ \forall i \tag{3}$$
$$(c_j - p^T A_j)x_j = 0, \ \forall j \tag{4}$$

donde a_i son las filas de la matriz A y A_j sus columnas.