

P1 | Receta para hacer modelamientos:

1. declarar conjuntos
2. declarar parámetros
3. variables de decisión
4. Expresar las restricciones en función de conjuntos y parámetros
5. Función objetivo.

① Conjuntos: P : pilotos

V : vuelos

D : días. {lunes, ..., domingo}

I : tipo de Avión.

② Parámetros:

- u_{pv} : elementos del piloto p que realiza el vuelo v .
- b_{pi} : si es que el piloto maneja aviones tipo i (1 si, 0 no).
- t_v : tiempo del vuelo v .
- a_{vi} : si el vuelo v usa avión de tipo i (1 si, 0 no).
- n_{vd} : # vuelos programados para el día d .

③ Variables de decisión

$$x_{pvd} = \begin{cases} 1, & \text{al piloto } p \text{ se le asigna el vuelo } v \text{ para el día } d \\ 0 & \sim \end{cases}$$

($\rightarrow$) ojo que cada piloto puede como máximo un vuelo diario $\Rightarrow$ no puede repetirse.

④ Restricciones

(i) Pilotos a lo más un vuelo diario

$$\sum_{v \in V} x_{pvd} \leq 1 \quad \forall p \in P, \forall d \in D$$

(ii) Trabaja a lo más 16 horas semanales

$$\sum_{v \in V} \sum_{d \in D} t_v x_{prd} \leq 16 \quad \forall p \in P$$

(iii) Se deben realizar todos los vuelos

$$\sum_{p \in P} x_{prd} = n_{rd} \quad \forall v \in V \text{ y } \forall d \in D$$

(iv) Los vuelos deben ser realizados por los pilotos adecuados

$$\sum_{i \in I} a_{vi} \cdot b_{pi} \geq x_{prd} \quad \forall p \in P, \forall v \in V, \forall d \in D$$

⑤ Función objetivo:

$$\sum_{p \in P} \sum_{v \in V} \sum_{d \in D} u_{pv} \cdot x_{prd}$$

$$\Rightarrow PL: \max \sum_{p \in P} \sum_{v \in V} \sum_{d \in D} u_{pv} \cdot x_{prd}$$

s.a:

$$\sum_{v \in V} x_{prd} \leq 1 \quad \forall p \in P, \forall d \in D$$

$$\sum_{v \in V} \sum_{d \in D} t_v x_{prd} \leq 16 \quad \forall p \in P$$

$$\sum_{p \in P} x_{prd} = n_{rd} \quad \forall v \in V, \forall d \in D$$

$$\sum_{i \in I} a_{vi} \cdot b_{pi} \geq x_{prd} \quad \forall p \in P, \forall v \in V, \forall d \in D$$

3. Sean $C \subseteq \mathbb{R}^m$ convexo y $x \in C$. Demuestre que x es punto extremo $\Leftrightarrow C \setminus \{x\}$ es convexo.

* z es punto extremo $\Rightarrow$ si $z = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2$ con $z_1, z_2 \in C$
 $\lambda \in]0, 1[$ entonces $x_1 = x_2 = x$.

$\Rightarrow$ Sea z un punto extremo de C y sea $x, y \in C \setminus \{z\}$
 sea $\lambda \in [0, 1]$ ¿ $\lambda x + (1-\lambda)y \in C \setminus \{z\}$? ¿Existe algún caso en que no se cumpla? no, ya que el único caso sería que $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ pero esto no ocurre pues es punto extremo, $\Rightarrow \forall x, y \in C \setminus \{z\}$ y $\forall \lambda \in (0, 1)$
 $\lambda x + (1-\lambda)y \in C \setminus \{z\}$.

* si existe otro punto extremo w ¿puede $C \setminus \{z\}$ no ser convexo?
 $\rightarrow$ Si, por que es convexo si contiene a cualquier comb. convexa de elementos en el conjunto y un pto extremo no puede ser uno.

$\Leftarrow$ $C \setminus \{z\}$ es convexo. Supongamos que z no es pto. extremo de C
 $\Rightarrow \exists x, y \in C \setminus \{z\} : \forall \lambda \in [0, 1] \quad z = \lambda x + (1-\lambda)y \in C \setminus \{z\}$
 $\Rightarrow$ Existe una combinación convexa de elementos en $C \setminus \{z\}$ que no está contenida en $C \setminus \{z\}$
 $\Rightarrow C \setminus \{z\}$ no es convexo $\rightarrow$ (contradicción)

ver el sistema

$$\begin{aligned} P_1) \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ & x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 0 \\ & x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Usamos el Teorema de caracterización: Descomponemos el Poliedro A de la forma $[BN]$ donde B es una matriz invertible compuesta por columnas arbitrarias de A , luego $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ es punto extremo si $B^{-1}b \geq 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 3 & -8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elegimos las columnas 1 y 2 $B_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$ es invertible: l.i.; $\det \neq 0, \dots$

$$* \text{ inversa: } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = A^{-1}$$

$$\rightarrow B_{12}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 1} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow x = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es el único punto extremo.

$$(2) \quad B_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{filas l.d.} \Rightarrow \text{no invertible}$$

$$(3) \quad B_{24} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \text{invertible: } B_{24}^{-1} = \frac{1}{-8 + 4} \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$(4) \quad B_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow B_{23}^{-1} = \frac{1}{6 - 12} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$(5) \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \text{son l.d.} \Rightarrow \text{no tienen inversa}$$

$$(6) \quad B_{34} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow B_{34}^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

direcciones Extremas:

¿Cómo se calculan? Se toman las matrices B_{ij} y se

considera una dirección $d = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_k \\ e_k \end{pmatrix}$: -
 $\hookrightarrow$ vector canónico de coordenadas k

(1) Para $B_{12} \rightarrow$ (i) $d = \begin{pmatrix} -B_{12}^{-1}a_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$
 $\Rightarrow$ no es dir. extrema.

(ii) $d = \begin{pmatrix} -B_{12}^{-1}a_4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -B_{12}^{-1}a_4 = -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow d = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ si es dirección extrema.

(3) B_{14} (i) $-B_{14}^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 4-4 \\ \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \geq 0 \checkmark$
 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ es dirección extrema.

(ii) $-B_{14}^{-1}a_3 = -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 6-3 \\ \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$

(4) B_{23} (i) $-B_{23}^{-1}a_1 = -\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3}-\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \neq 0$

(ii) $-B_{23}^{-1}a_4 = -\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2-4 \\ -\frac{8}{3}+\frac{8}{3} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \checkmark$
 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es dirección extrema.

(6) B_{34} (i) $-B_{34}^{-1}a_1 = -\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{2}{3}-\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$

(ii) $-B_{34}^{-1}a_2 = -\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{4}{3}-\frac{4}{3} \\ \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \geq 0 \checkmark$
 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ es dirección extrema! ;)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 1 &\geq 0 \\ x_1 - 2x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

como era ≥ 0 , debo restarle algo positivo para llegar a la igualdad

Pasar a forma estandar.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Esto se conoce como Poliedro en forma estandar

las variables añadidas son siempre ≥ 0 .

Luego: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculemos puntos extremos:

Plaz: (1) $B_{12} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$ invertible $\rightarrow$ Podemos usar Teo. caracterización

$$\Rightarrow B_{12}^{-1} = \frac{1}{-2 - (-1)} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego: $x = \begin{pmatrix} B_{12}^{-1} \cdot b \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow B_{12}^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

como $B_{12}^{-1} \cdot b \geq 0 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es punto extremo.

(2) $B_{13} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{13}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{13}^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$

(3) $B_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{14}^{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{14}^{-1} \cdot b = - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$

• 050: La componente la primera componente del vector $B_{ij}^{-1} \cdot b$ va en la componente i del vector x . La segunda en j .

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es punto extremo.

(4) $B_{23} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{23}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{23}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Luego: $B_{23}^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$

(5) $B_{24} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow B_{24}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow B_{24}^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0$

(6) $B_{34} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow B_{34}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow B_{34}^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$

Los ptes extremos son: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (Tomamos solamente las componentes 1 y 2 pues son los del problema original.)

ahora las direcciones Extremas. Por teorema de caracterización.

$$(1) \text{ (i) } -B_{12} \cdot a_3 = -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \rightarrow d^T = (2, 1, 1, 0), \text{ es dir. extrema!}$$

$$\text{ (ii) } -B_{12} \cdot a_4 = -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$(2) \text{ (i) } -B_{13} \cdot a_2 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ es dirección extrema.}$$

$$\text{ (ii) } -B_{13} \cdot a_4 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dir extrema.}$$

$$(3) \text{ (i) } -B_{14} \cdot a_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \not\geq 0$$

$$\text{ (ii) } -B_{14} \cdot a_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dir extrema}$$

¹⁴ Las direcciones extremas son: $d_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (tomamos solo los componentes del problema original).