Elementos de Algebra MA3101
Profesor: Ángel Pardo J.
Auxiliares: Alonso Cancino T.
Juan Pedro Ross O.
Fecha: Viernes 18 de Octubre 2019

Auxiliar 9

P1. **(División de polinomios)**

(a) Sea R un dominio y $p, d \in R[x]$ con $d = (x - \alpha)$ mónico. Demostrar que $\exists! q \in R[x]$ tal que $p = qd + p[\alpha]$.

(b) Sea $\mathbf{r}(p) = \{\alpha \in R : p[\alpha] = 0\}$. Entonces $|\mathbf{r}(p)| \leq gr(p)$, siempre que $p \neq 0$.

(c) ¿Que puede decir del punto anterior si se trabaja en $x^3 \in \mathbf{Z}_8[x]$?

P2. **(Caracterización de polinomios)**

(a) Demuestre que si R dominio integral, entonces $R^p \subseteq R^i$.

(b) Demuestre que un anillo R cumple: $DIP \Leftrightarrow DFU \wedge$ todo ideal primo no nulo es maximal.

(c) Demuestre que $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}] = \{a + i\sqrt{3}b : a, b \in \mathbf{Z}\} \subseteq \mathbf{C}$.

(d) ¿Coinciden los irreducibles con los primos?

P3. Sea R un anillo conmutativo. Muestre que los siguientes son equivalentes:

(a) R es Noetheriano, esto es, para cualquier cadena ascendente de ideales $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \exists N \in \mathbf{N}$ tal que $\forall n \geq N, I_n = I_{n+1}$.

(b) Cualquier ideal de R es generado por finitos elementos.

(c) Toda colección no vacía de ideales de R tiene un elemento maximal respecto a la inclusión.

P1) Teo div $\Rightarrow \exists!\ q, r$ t.q., con $gr(r) < gr(x-\alpha)$

$$\Downarrow$$

$p = q(x-\alpha) + r$ pero $\left(gr(r) = 0 \right.$ v $-\infty$

$p[\alpha] = r[\alpha] \Longrightarrow r \equiv cte \Leftarrow$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \overset{\shortparallel}{p[\alpha]}$ //

b) Inducción en grado de p.

Si $gr(p) = 0 \Rightarrow p$ es cte $\Rightarrow r(p) = \emptyset$

$|\emptyset| = 0 = gr(p)$ //

$n \Rightarrow n+1$.

Sea α raiz de p, dividimos por $(x-\alpha)$

$$\Rightarrow p = q(x-\alpha) + \underbrace{p[\alpha]}_{0}$$

Dominio $\Rightarrow gr(p) = gr(q) + gr(x-\alpha)$

$\Rightarrow gr(q) = n \Rightarrow |r(q)| \leq n$

~~Dominio.~~

Además si $\beta \in r(q) \Rightarrow$

$p[\beta] = q[\beta] \cdot \underbrace{(\beta-\alpha)}_{\cancel{\neq 0}} = 0$ $(\cancel{\beta \neq \alpha\ q[\beta] = 0})$

$= 0$ // $\quad r(q) \subseteq r(p)$

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
8 de Octubre 2019

Clase Auxiliar #4: Geometría Vectorial

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. (a) Considere los puntos $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Verifique que los puntos son no colineales y encuentre la ecuación vectorial y cartesiana del plano Π_1 que los contiene.

(b) Dadas L_1 y L_2 definidas por:

$$L_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \qquad L_2 : \begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ z = -5 \end{cases}$$

Verifique que L_1 y L_2 son paralelas y distintas, y encuentre la ecuación vectorial, y cartesiana, del plano Π_2 que las contiene.

(c) Encuentre la ecuación vectorial de la recta L que se obtiene como la intersección de los planos Π_1 y Π_2.

(d) Encuentre el punto S de intersección de las rectas L_1 y L y verifique que S satisface la ecuación cartesiana del plano Π_1.

P2. Sean $P = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinar la distancia de P a la recta que pasa por Q y por R.

(b) Determinar la ecuación vectorial de la recta L, que pasa por P_0 y es ortogonal al plano que contiene a P, Q y R, y concluir la distancia de este al punto $\begin{pmatrix} -19/3 \\ 31/12 \\ -9 \end{pmatrix}$

P3. **Propuesto** Considere:

$$\Pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + S_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix},\ L_1 : \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ L_2 : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(i) Calcule la ecuación del plano Π_1 que contiene a L_1 y L_2.

(ii) Encuentre la intersección entre Π y Π_1.

(iii) Calcule la distancia de Q al plano Π_1 y a L_1.

(iv) Encuentre la ecuación del plano Π_2 que es paralelo a Π y pasa por Q.

(v) Calcule la distancia entre Π y Π_2.

P4. Considere $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ con

$$T(p)(x) = 2p'(x) + \int_0^x 3p(t)dt$$

(a) Demuestre que es lineal.

(b) Estudie inyectividad y sobreyectividad.

y si $\beta \in r(p) \setminus \{\alpha\}$.

$$\Rightarrow p(\beta) = q[\beta] \cdot \underbrace{(\beta - \alpha)}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow q[\beta] = 0$$

Dominio

$$\Rightarrow r(q) \subseteq \overbrace{r(p) \setminus \{\alpha\} \cup \{\alpha\}}^{r(p)} \subseteq r(q) \cup \{\alpha\}$$

$$\Rightarrow |r(q)| \leq |r(p)| \leq |r(q)| + 1 \leq n+1 = gr(p) \text{ //}$$

en $\mathbb{Z}_8[x]$, $r(x^3) = \{0, 2, 4, 6\}$

ie $|r(x^3)| = 4 > gr(x^3) = 3$

No hay problema pues $\mathbb{Z}_8$ no dominio

$4 \cdot 2 = 8 = 0$ //

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
8 de Octubre 2019

Clase Auxiliar #4: Geometría Vectorial

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. **(a)** Considere los puntos $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Verifique que los puntos son no colineales y encuentre la ecuación vectorial y cartesiana del plano Π_1 que los contiene.

(b) Dadas L_1 y L_2 definidas por:

$$L_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \quad L_2 : \begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ z = -5 \end{cases}$$

Verifique que L_1 y L_2 son paralelas y distintas, y encuentre la ecuación vectorial, y cartesiana, del plano Π_2 que las contiene.

(c) Encuentre la ecuación vectorial de la recta L que se obtiene como la intersección de los planos Π_1 y Π_2.

(d) Encuentre el punto S de intersección de las rectas L_1 y L y verifique que S satisface la ecuación cartesiana del plano Π_1.

P2. Sean $P = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinar la distancia de P a la recta que pasa por Q y por R.

(b) Determinar la ecuación vectorial de la recta L, que pasa por P_0 y es ortogonal al plano que contiene a P, Q y R, y concluir la distancia de este al punto $\begin{pmatrix} -19/3 \\ 31/12 \\ -9 \end{pmatrix}$

P3. **Propuesto** Considere:

$$\Pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + S_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, L_1 : \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, L_2 : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(i) Calcule la ecuación del plano Π_1 que contiene a L_1 y L_2.

(ii) Encuentre la intersección entre Π y Π_1.

(iii) Calcule la distancia de Q al plano Π_1 y a L_1.

(iv) Encuentre la ecuación del plano Π_2 que es paralelo a Π y pasa por Q.

(v) Calcule la distancia entre Π y Π_2.

P4. Considere $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ con

$$T(p)(x) = 2p'(x) + \int_0^x 3p(t)dt$$

(a) Demuestre que es lineal.

(b) Estudie inyectividad y sobreyectividad.

P2] $a \in R^p \wedge a = bc$

$\Rightarrow a \cdot 1 = bc \Rightarrow a | bc \Rightarrow a|b \vee a|c$

SPG: $a|b \Rightarrow al = b \Rightarrow a = alc \Rightarrow 1 = lc \Rightarrow c \in R^i$ //

b) R DIP $\Rightarrow R$ DFU ✓ (De clases)

Sea A ideal primo

R DIP $\Rightarrow A = (a)$, veamos que a primo

En efecto, $a|bc \Rightarrow bc \in (a) \Rightarrow b \in (a) \vee c \in (a)$

SPG: $b \in (a) \Rightarrow b = al \Rightarrow a|b$ //

$\Rightarrow a \in R^p \subseteq R^i \Rightarrow a \in R^i$

Si $(a) \subseteq J \underset{\underset{\text{PIP}}{\uparrow}}{=} (b) \Rightarrow a \in (b) \Rightarrow a = bl \Rightarrow b \in R^i \vee l \in R^i$

Si $b \in R^i$ ✓ $(b) = R$ //

Si $l \in R^i \Rightarrow al^{-1} = b \Rightarrow (a) = (b)$ ✓

$\therefore A$ maximal //

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
8 de Octubre 2019

Clase Auxiliar #4: Geometría Vectorial

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. (a) Considere los puntos $P = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$.

Verifique que los puntos son no colineales y encuentre la ecuación vectorial y cartesiana del plano Π_1 que los contiene.

(b) Dadas L_1 y L_2 definidas por:

$$L_1 : \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \qquad L_2 : \begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ z = -5 \end{cases}$$

Verifique que L_1 y L_2 son paralelas y distintas, y encuentre la ecuación vectorial, y cartesiana, del plano Π_2 que las contiene.

(c) Encuentre la ecuación vectorial de la recta L que se obtiene como la intersección de los planos Π_1 y Π_2.

(d) Encuentre el punto S de intersección de las rectas L_1 y L y verifique que S satisface la ecuación cartesiana del plano Π_1.

P2. Sean $P = \begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}-5\\-1\\1\end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(a) Determinar la distancia de P a la recta que pasa por Q y por R.

(b) Determinar la ecuación vectorial de la recta L, que pasa por P_0 y es ortogonal al plano que contiene a P, Q y R, y concluir la distancia de este al punto $\begin{pmatrix}-19/3\\31/12\\-9\end{pmatrix}$

P3. Propuesto Considere:

$$\Pi : \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + S_1\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} + S_2\begin{pmatrix}10\\2\\-7\end{pmatrix}, L_1 : \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, L_2 : \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$$

(i) Calcule la ecuación del plano Π_1 que contiene a L_1 y L_2.

(ii) Encuentre la intersección entre Π y Π_1.

(iii) Calcule la distancia de Q al plano Π_1 y a L_1.

(iv) Encuentre la ecuación del plano Π_2 que es paralelo a Π y pasa por Q.

(v) Calcule la distancia entre Π y Π_2.

P4. Considere $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ con

$$T(p)(x) = 2p'(x) + \int_0^x 3p(t)dt$$

(a) Demuestre que es lineal.

(b) Estudie inyectividad y sobreyectividad.

$\Leftarrow$) Sea I ideal de R, veamos que es ppal.

Sea $a \in I$ tq tiene la menor factorización. (bien def pues DFU)

$$\Rightarrow a = \underbrace{\alpha}_{\in R^*} \overbrace{a_1 \ldots a_n}^{\in R^i}$$

Si $n = 0 \Rightarrow a = \alpha \Rightarrow (a) = R = I$ ✓

~~Si~~ $n \Rightarrow n+1$

Notemos que $I \subseteq (a_1)$.

En efecto si $x \in \cancel{(a_1) \setminus I}$ $I \setminus (a_1)$

Como (a_1) es ppal $\wedge$ a_1 es irreducible $\Rightarrow$ maximal entre los ppales

Pero como DFU $\Rightarrow R^i = R^p \Rightarrow a_1$ es primo y por hip $\Rightarrow (a_1)$ es maximal entre todos.

$\Rightarrow R/(a_1)$ es cuerpo. Como $x \notin (a_1) \Rightarrow x + (a_1)$ invertible

~~$\Rightarrow \exists y \in R$ y $z \in R$ $x - y = a_1 z$~~

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
8 de Octubre 2019

Clase Auxiliar #4: Geometría Vectorial

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. **(a)** Considere los puntos $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Verifique que los puntos son no colineales y encuentre la ecuación vectorial y cartesiana del plano Π_1 que los contiene.

(b) Dadas L_1 y L_2 definidas por:

$$L_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \qquad L_2 : \begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ z = -5 \end{cases}$$

Verifique que L_1 y L_2 son paralelas y distintas, y encuentre la ecuación vectorial, y cartesiana, del plano Π_2 que las contiene.

(c) Encuentre la ecuación vectorial de la recta L que se obtiene como la intersección de los planos Π_1 y Π_2.

(d) Encuentre el punto S de intersección de las rectas L_1 y L y verifique que S satisface la ecuación cartesiana del plano Π_1.

P2. Sean $P = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinar la distancia de P a la recta que pasa por Q y por R.

(b) Determinar la ecuación vectorial de la recta L, que pasa por P_0 y es ortogonal al plano que contiene a P, Q y R, y concluir la distancia de este al punto $\begin{pmatrix} -19/3 \\ 31/12 \\ -9 \end{pmatrix}$

P3. **Propuesto** Considere:

$$\Pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + S_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, L_1 : \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, L_2 : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(i) Calcule la ecuación del plano Π_1 que contiene a L_1 y L_2.

(ii) Encuentre la intersección entre Π y Π_1.

(iii) Calcule la distancia de Q al plano Π_1 y a L_1.

(iv) Encuentre la ecuación del plano Π_2 que es paralelo a Π y pasa por Q.

(v) Calcule la distancia entre Π y Π_2.

P4. Considere $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ con

$$T(p)(x) = 2p'(x) + \int_0^x 3p(t)dt$$

(a) Demuestre que es lineal.

(b) Estudie inyectividad y sobreyectividad.

$\Rightarrow \exists\, y$ tq $xy + (a_1) = 1 + (a_1)$

$\Rightarrow \exists\, z$ tq $xy - 1 = z a_1$

$\Leftrightarrow \quad xy - z a_1 = 1 \;/ \cdot\, \alpha a_2 \cdots a_n$

$$\underbrace{\underset{\in I}{x}\, y \cdot \alpha a_2 \cdots a_n - \underbrace{z a}_{\in I}}_{\in I} = \alpha a_2 \cdots a_n$$

$\Rightarrow \alpha a_2 \cdots a_n \in I$ pero tiene menos irreducibles que $a \xrightarrow{\leftarrow} !$

$\therefore\; I \subseteq (a_1)$

~~OBS: Si $n = 1$~~

OBS: Si $n = 1 \Rightarrow a = \alpha a_1 \Rightarrow a\alpha^{-1} = a_1$

$\Rightarrow a_1 \in (a) \subseteq I \subseteq (a_1) \Rightarrow I = (a_1)$ //

Si $n \geq 2$: Sea $J = \{x \in R : x a_1 \in I\} \trianglelefteq R$

Sabemos que $\alpha a_2 \cdots a_n \in J \Rightarrow J$ contiene un elemento con $n-1$ irreducibles $\underset{HI}{\Rightarrow} J = (b)$

Veamos $I = (a_1 \underbrace{\underset{\in J}{b}}_{\in I}) \Rightarrow (a_1 b) \subseteq I \subseteq (a_1) \underset{?}{\subseteq} (a_1 b)$

$x \in I \Rightarrow x = a_1 r \Rightarrow r \in J \Rightarrow x = a_1 b\, l$ //

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
8 de Octubre 2019

Clase Auxiliar #4: Geometría Vectorial

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. (a) Considere los puntos $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Verifique que los puntos son no colineales y encuentre la ecuación vectorial y cartesiana del plano Π_1 que los contiene.

(b) Dadas L_1 y L_2 definidas por:

$$L_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \qquad L_2 : \begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ z = -5 \end{cases}$$

Verifique que L_1 y L_2 son paralelas y distintas, y encuentre la ecuación vectorial, y cartesiana, del plano Π_2 que las contiene.

(c) Encuentre la ecuación vectorial de la recta L que se obtiene como la intersección de los planos Π_1 y Π_2.

(d) Encuentre el punto S de intersección de las rectas L_1 y L y verifique que S satisface la ecuación cartesiana del plano Π_1.

P2. Sean $P = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinar la distancia de P a la recta que pasa por Q y por R.

(b) Determinar la ecuación vectorial de la recta L, que pasa por P_0 y es ortogonal al plano que contiene a P, Q y R, y concluir la distancia de este al punto $\begin{pmatrix} -19/3 \\ 31/12 \\ -9 \end{pmatrix}$

P3. Propuesto Considere:

$$\Pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + S_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \; L_1 : \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; L_2 : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(i) Calcule la ecuación del plano Π_1 que contiene a L_1 y L_2.

(ii) Encuentre la intersección entre Π y Π_1.

(iii) Calcule la distancia de Q al plano Π_1 y a L_1.

(iv) Encuentre la ecuación del plano Π_2 que es paralelo a Π y pasa por Q.

(v) Calcule la distancia entre Π y Π_2.

P4. Considere $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ con

$$T(p)(x) = 2p'(x) + \int_0^x 3p(t)dt$$

(a) Demuestre que es lineal.

(b) Estudie inyectividad y sobreyectividad.

c) $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}] = \{ \sum_{j=0}^{n} a_i (i\sqrt{3})^j : a_i \in \mathbb{Z} \}$

$$= \{ \sum_{\substack{k \in 4\mathbb{Z} \\ 0 \le k \le n}} a_k 9^k \;\; k \in \mathbb{Z} + \sum_{\substack{k \in 4\mathbb{Z}+1 \\ 0 \le k \le n}} i a_k 9^{k-1} \sqrt{3}$$

$$+ \sum_{\substack{\cancel{j=0} \\ k \in 4\mathbb{Z}+2 \\ 0 \le k \le n}} -a_k 9^{k-2} \cdot 3 + \sum_{\substack{k \in 4\mathbb{Z}+3 \\ 0 \le k \le n}} i (-a_k) 9^{k-3} 3\sqrt{3} \}$$

$$= \{ \underbrace{A}_{\in \mathbb{Z}} + B + C + D \}. \qquad \in i\sqrt{3}\mathbb{Z}$$

y como $a + ib\sqrt{3}$

$$= (xb + a)[i\sqrt{3}]$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}[i\sqrt{3}] = \{ a + i\sqrt{3}b : a, b \in \mathbb{Z} \}.$$

d) Ya sabemos que $R^p \subseteq R^i$, veamos que

$4 \in R^i / R^p$ en efecto, ~~sabemos que~~ ?

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
8 de Octubre 2019

Clase Auxiliar #4: Geometría Vectorial

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. (a) Considere los puntos $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Verifique que los puntos son no colineales y encuentre la ecuación vectorial y cartesiana del plano Π_1 que los contiene.

(b) Dadas L_1 y L_2 definidas por:

$$L_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \qquad L_2 : \begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ z = -5 \end{cases}$$

Verifique que L_1 y L_2 son paralelas y distintas, y encuentre la ecuación vectorial, y cartesiana, del plano Π_2 que las contiene.

(c) Encuentre la ecuación vectorial de la recta L que se obtiene como la intersección de los planos Π_1 y Π_2.

(d) Encuentre el punto S de intersección de las rectas L_1 y L y verifique que S satisface la ecuación cartesiana del plano Π_1.

P2. Sean $P = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinar la distancia de P a la recta que pasa por Q y por R.

(b) Determinar la ecuación vectorial de la recta L, que pasa por P_0 y es ortogonal al plano que contiene a P, Q y R, y concluir la distancia de este al punto $\begin{pmatrix} -19/3 \\ 31/12 \\ -9 \end{pmatrix}$

P3. Propuesto Considere:

$$\Pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + S_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix},\ L_1 : \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ L_2 : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(i) Calcule la ecuación del plano Π_1 que contiene a L_1 y L_2.

(ii) Encuentre la intersección entre Π y Π_1.

(iii) Calcule la distancia de Q al plano Π_1 y a L_1.

(iv) Encuentre la ecuación del plano Π_2 que es paralelo a Π y pasa por Q.

(v) Calcule la distancia entre Π y Π_2.

P4. Considere $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ con

$$T(p)(x) = 2p'(x) + \int_0^x 3p(t)dt$$

(a) Demuestre que es lineal.

(b) Estudie inyectividad y sobreyectividad.

$2 \mid 4 = (1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)$

pero $2(a+ib) = (1 \pm \sqrt{3}i)$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow 2$ no primo.

Por otro lado.

$2 = (a+b\sqrt{3}i)(c+d\sqrt{3}i) \quad / |\cdot|^2$

$\Rightarrow 4 = \underline{(a^2+3b^2)(c^2+3d^2)} \leftarrow$ visto ahora en $\mathbb{Z}$.

$1\cdot 4, 2\cdot 2, 4\cdot 1$.

Caso 1: $a^2+3b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \wedge b^2 = 0$

$c^2+3b^2 = 4 \Rightarrow (c^2 = 1 \wedge b^2 = 1)$

$\vee (c^2 = 4 \wedge d = 0)$

Si $a = 1, b = 0, c = 1, b = 1$.

$\Rightarrow 2 = 1(1+\sqrt{3})i$ ↯

Si $a = 1, b = 0, c = 2, d = 0$

$\Rightarrow 2 = 1\cdot 2 \wedge 1 \in \mathbb{Z}[x]^{\times}$ //

Caso 2: $a^2+3b^2 = 2 \wedge c^2+3d^2 = 2$

Nunca ocurre. //

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
8 de Octubre 2019

Clase Auxiliar #4: Geometría Vectorial

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. **(a)** Considere los puntos $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Verifique que los puntos son no colineales y encuentre la ecuación vectorial y cartesiana del plano Π_1 que los contiene.

(b) Dadas L_1 y L_2 definidas por:

$$L_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \qquad L_2 : \begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ z = -5 \end{cases}$$

Verifique que L_1 y L_2 son paralelas y distintas, y encuentre la ecuación vectorial, y cartesiana, del plano Π_2 que las contiene.

(c) Encuentre la ecuación vectorial de la recta L que se obtiene como la intersección de los planos Π_1 y Π_2.

(d) Encuentre el punto S de intersección de las rectas L_1 y L y verifique que S satisface la ecuación cartesiana del plano Π_1.

P2. Sean $P = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinar la distancia de P a la recta que pasa por Q y por R.

(b) Determinar la ecuación vectorial de la recta L, que pasa por P_0 y es ortogonal al plano que contiene a P, Q y R, y concluir la distancia de este al punto $\begin{pmatrix} -19/3 \\ 31/12 \\ -9 \end{pmatrix}$

P3. **Propuesto** Considere:

$$\Pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + S_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix},\ L_1 : \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ L_2 : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(i) Calcule la ecuación del plano Π_1 que contiene a L_1 y L_2.

(ii) Encuentre la intersección entre Π y Π_1.

(iii) Calcule la distancia de Q al plano Π_1 y a L_1.

(iv) Encuentre la ecuación del plano Π_2 que es paralelo a Π y pasa por Q.

(v) Calcule la distancia entre Π y Π_2.

P4. Considere $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ con

$$T(p)(x) = 2p'(x) + \int_0^x 3p(t)dt$$

(a) Demuestre que es lineal.

(b) Estudie inyectividad y sobreyectividad.

P1) a⇒b) si R no es generado por finitos elementos $\forall x_1 \exists x_2$ tq

$$(x_1) \subseteq (x_1, x_2) \neq R$$

$\Rightarrow \exists x_3$ en $R \setminus (x_1, x_2)$

$$(x_1) \subseteq (x_1, x_2) \subseteq (x_1, x_2, x_3) \neq R$$

y así podemos seguir indefinidamente sin estabilizarse //

~~pues en la medida que~~

$$\cancel{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq R}$$

$$\cancel{\Rightarrow \left| R/(x_1, \ldots, x_n) \right| > 1 \Rightarrow \exists x_{n+1} \in R \setminus (x_1, \ldots, x_n)}$$

b⇒a) Sea $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$

Luego $\bigcup_{i \in I} I_i$ es ideal, en efecto.

$(\bigcup I_i, +)$ grupo pues es unión de subgrupos contenidos y si

$x \in \bigcup I_i \Rightarrow x \in I_j \Rightarrow rx \in I_j \subseteq \bigcup I_i \quad \forall r \in R$ //

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
8 de Octubre 2019

Clase Auxiliar #4: Geometría Vectorial

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. (a) Considere los puntos $P = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$.

Verifique que los puntos son no colineales y encuentre la ecuación vectorial y cartesiana del plano Π_1 que los contiene.

(b) Dadas L_1 y L_2 definidas por:

$$L_1 : \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \qquad L_2 : \begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ z = -5 \end{cases}$$

Verifique que L_1 y L_2 son paralelas y distintas, y encuentre la ecuación vectorial, y cartesiana, del plano Π_2 que las contiene.

(c) Encuentre la ecuación vectorial de la recta L que se obtiene como la intersección de los planos Π_1 y Π_2.

(d) Encuentre el punto S de intersección de las rectas L_1 y L y verifique que S satisface la ecuación cartesiana del plano Π_1.

P2. Sean $P = \begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}-5\\-1\\1\end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(a) Determinar la distancia de P a la recta que pasa por Q y por R.

(b) Determinar la ecuación vectorial de la recta L, que pasa por P_0 y es ortogonal al plano que contiene a P, Q y R, y concluir la distancia de este al punto $\begin{pmatrix}-19/3\\31/12\\-9\end{pmatrix}$

P3. Propuesto Considere:

$$\Pi : \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + S_1\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} + S_2\begin{pmatrix}10\\2\\-7\end{pmatrix}, L_1 : \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, L_2 : \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$$

(i) Calcule la ecuación del plano Π_1 que contiene a L_1 y L_2.

(ii) Encuentre la intersección entre Π y Π_1.

(iii) Calcule la distancia de Q al plano Π_1 y a L_1.

(iv) Encuentre la ecuación del plano Π_2 que es paralelo a Π y pasa por Q.

(v) Calcule la distancia entre Π y Π_2.

P4. Considere $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ con

$$T(p)(x) = 2p'(x) + \int_0^x 3p(t)dt$$

(a) Demuestre que es lineal.

(b) Estudie inyectividad y sobreyectividad.

~~Por Hip~~ $\exists N$ tq $I_n = I_{n+1}$ $\forall n \geq N$

$\Rightarrow \cancel{\bigcup I_j} = I_N$

Hip $\Rightarrow$ $\bigcup I_n$ finitamente generado

$\Rightarrow (a_1, -, a_m) = \bigcup I_n$

$\Rightarrow \forall j \in \{1, -, m\}, \exists n_j$ tq $a_j \in I_{n_j}$

Sea $m^* = \max\limits_{j \in \{1,-,m\}} \{n_j\}$: $\bigcup I_n = (a_1, -, a_m) \subseteq I_{m^*}$

$\Rightarrow N = m^*$ //

a⇒c) Si $\exists \{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ colección no vacía sin elemento maximal.

$\forall \lambda_1 \in \Lambda$ $\exists \lambda_2 \in \Lambda$ tq $I_{\lambda_1} \subsetneq I_{\lambda_2}$

$\Rightarrow$ No se estabiliza.

c⇒a) Tomamos la cadena $\{I_j\}$

Por Hip $\exists I_{n^*}$ maximal y como están ordenados.

$\Rightarrow \forall n \geq n^*$: $I_n = I_{n+1} = I_{n^*}$ //

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
8 de Octubre 2019

Clase Auxiliar #4: Geometría Vectorial

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. (a) Considere los puntos $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Verifique que los puntos son no colineales y encuentre la ecuación vectorial y cartesiana del plano Π_1 que los contiene.

(b) Dadas L_1 y L_2 definidas por:

$$L_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \quad L_2 : \begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ z = -5 \end{cases}$$

Verifique que L_1 y L_2 son paralelas y distintas, y encuentre la ecuación vectorial, y cartesiana, del plano Π_2 que las contiene.

(c) Encuentre la ecuación vectorial de la recta L que se obtiene como la intersección de los planos Π_1 y Π_2.

(d) Encuentre el punto S de intersección de las rectas L_1 y L y verifique que S satisface la ecuación cartesiana del plano Π_1.

P2. Sean $P = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinar la distancia de P a la recta que pasa por Q y por R.

(b) Determinar la ecuación vectorial de la recta L, que pasa por P_0 y es ortogonal al plano que contiene a P, Q y R, y concluir la distancia de este al punto $\begin{pmatrix} -19/3 \\ 31/12 \\ -9 \end{pmatrix}$

P3. Propuesto Considere:

$$\Pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + S_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, L_1 : \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, L_2 : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(i) Calcule la ecuación del plano Π_1 que contiene a L_1 y L_2.

(ii) Encuentre la intersección entre Π y Π_1.

(iii) Calcule la distancia de Q al plano Π_1 y a L_1.

(iv) Encuentre la ecuación del plano Π_2 que es paralelo a Π y pasa por Q.

(v) Calcule la distancia entre Π y Π_2.

P4. Considere $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ con

$$T(p)(x) = 2p'(x) + \int_0^x 3p(t)dt$$

(a) Demuestre que es lineal.

(b) Estudie inyectividad y sobreyectividad.