Elementos de Algebra MA3101
Profesor: Ángel Pardo J.
Auxiliares: Alonso Cancino T.
Juan Pedro Ross O.
Fecha: Viernes 18 de Octubre 2019

Auxiliar 9

P1. (División de polinomios)

(a) Sea R un dominio y $p, d \in R[x]$ con $d = (x - \alpha)$ mónico. Demostrar que $\exists! q \in R[x]$ tal que $p = qd + p[\alpha]$.

(b) Sea $\mathbf{r}(p) = \{\alpha \in R : p[\alpha] = 0\}$. Entonces $|\mathbf{r}(p)| \leq gr(p)$, siempre que $p \neq 0$.

(c) ¿Que puede decir del punto anterior si se trabaja en $x^3 \in \mathbf{Z}_8[x]$?

P2. (Caracterización de polinomios)

(a) Demuestre que si R dominio integral, entonces $R^p \subseteq R^i$.

(b) Demuestre que un anillo R cumple: $DIP \Leftrightarrow DFU \wedge$ todo ideal primo no nulo es maximal.

(c) Demuestre que $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}] = \{a + i\sqrt{3}b : a, b \in \mathbf{Z}\} \subseteq \mathbf{C}$.

(d) ¿Coinciden los irreducibles con los primos?

P3. Sea R un anillo conmutativo. Muestre que los siguientes son equivalentes:

(a) R es Noetheriano, esto es, para cualquier cadena ascendente de ideales $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \exists N \in \mathbf{N}$ tal que $\forall n \geq N, I_n = I_{n+1}$.

(b) Cualquier ideal de R es generado por finitos elementos.

(c) Toda colección no vacía de ideales de R tiene un elemento maximal respecto a la inclusión.