Elementos de Algebra MA3101
Profesor: Ángel Pardo J.
Auxiliares: Alonso Cancino T.
Juan Pedro Ross O.
Fecha: Viernes 4 de Octubre 2019

Auxiliar 7

P1. [Función de Euler] Sea p primo, $n \in \mathbb{N}$ y $m = p^n - 1$. Encuentre el orden de $[p] \in (Z_m^*, \cdot)$ y deduzca que $n | \varphi(p^n - 1)$.

P2. Nilradical y radical de Jacobson

a) Muestre que el conjunto R de todos los elementos nilpotentes de un anillo A, conmutativo, es un ideal, y A/R no tiene ningún elemento nilpotente distinto de 0.

b) Demuestre que el nilradical de A es la intersección de todos los ideales primos de A.

c) El nilradical de Jacobson $\mathfrak{R}$ de A se define como la intersección de todos los ideales maximales de A.
Demuestre que $x \in \mathfrak{R}$ ssi $1 - xy$ es invertible $\forall y \in A$.

P3. Extensión y contracción Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos y sean I, J ideales de A y B respectivamente. Definimos la extensión de I como $I^e = (f(I))$. Por otro lado, definimos la contracción de J como $J^c = f^{-1}(J)$.

a) Demuestre que si J es un ideal primo, J^c lo es.

b) Demuestre que $I \subseteq I^{ec}$ y $J^{ce} \subseteq J$.

c) Muestre que $J^c = J^{cec}$ y $I^e = I^{ece}$.

d) Sea C el conjunto de los ideales contraidos en A y E el conjunto de los ideales extendidos en B. Demuestre que $C = \{I : I^{ec} = I\}, E = \{J : J^{ce} = J\}$ y que la función $I \to I^e$ es una aplicación biyectiva de C en E con inversa $J \to J^c$.