

Elementos de Álgebra MA3101

Profesor: Ángel Pardo J.**Auxiliares:** Alonso Cancino T.

Juan Pedro Ross O.

Fecha: Viernes 13 de Septiembre 2019**Auxiliar 5**

- P1.** Sea R un anillo tal que $\forall x \in R : x^2 = x$ (Anillo Boleano), entonces R es conmutativo.
- P2.** Demuestre que si $|R| < \infty$, entonces R es dominio integral $\Leftrightarrow R$ es cuerpo. ¿Es necesaria la hipótesis del cardinal?
- P3.** Sea p primo, y R un anillo con unidad tal que $|R| = p^2$. Muestre que R es conmutativo. Indicación estudie $M = \{r \in R : ar = ra \forall a \in R\}$.
- P4.** Sea R un anillo conmutativo con unidad, con $\text{char}(R) = p$ (la menos cantidad de veces tal que $1+1+\dots+1=0$) que , con p primo. Demuestre que: la función $f : R \Rightarrow R$ tal que $f(x) = x^p$, cumple que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ y $f(1) = 1$ (Esto es lo que se llama, morfismo de anillos).

$$P1) (x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y$$

$$x+y \Rightarrow -yx = xy$$

$$\text{Por otro lado } -yx = (-yx)^2 = (-yx)(-yx) = (yx)^2 = yx$$

$$\therefore yx = xy.$$

$$P2) \Leftrightarrow \text{No hay } \left(\begin{array}{l} \text{? dominio} \\ \text{y no cuerpo} \end{array} \right)$$

$$ac = bc \quad | \cdot c^{-1} \Rightarrow \boxed{a = b}$$

$$\Rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax$$

$\approx$ fijo, no nulo.

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow ax_1 = ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Dominio $\Rightarrow$ cancelación.

$\therefore f$ inyectiva, y como $|\mathbb{R}| < +\infty$

inyectiva $\Leftrightarrow f$ sobreyectiva.

$\Rightarrow \exists b \text{ t.s. } ab = ba = 1 \Rightarrow a \text{ es invertible,}$

Pregunta	Indicador
a)	11- Demuestra dominio en manifiestos
	12- Determinar que la proposición es falsa
	13- Justifica adecuadamente, puede ser con un contraejemplo
	14- Comprende proposiciones lógicas y explica.
	15-
	16- Demuestra manejo en conceptos básicos como relaciones de orden y conjuntos.
	17-
	17-
b)	11- Realiza el caso base.
	12- Detecta la hipótesis inductiva
	13- Ejecuta paso inductivo correctamente
	14- Desarrolla el paso inductivo y reconoce la hipótesis inductiva
	15-
	16-
	17-
	17-

0.5
4.0
0.5
0.5
0.5
1.5

P3 $M = \{r \in R : ar = ra \ \forall a\}$

$0 \in M \Rightarrow M \neq \emptyset \quad \wedge \quad M \subseteq R$

Sean $x, y \in M \Rightarrow a(x-y)$
 $= ax + a(-y)$ / dist.
 $= ax - (ay)$ / prop. conocida
 $= xa - (ya)$ / $x, y \in M$.
 $= (x-y)a$ / dist.

$\Rightarrow (M, +)$ es subgrupo de $(R, +)$.

Lagrange $\rightarrow |M| \mid |R| \Rightarrow |M| \in \langle 2, P, P^2 \rangle$.

Como $0, 1 \in M \Rightarrow |M| \in \langle P, P^2 \rangle$.

Si $|M| = P \Rightarrow |R/M| = P$.

$\Rightarrow R/M$ cíclico, con generador $(x+M)$

Sean $x_1, x_2 \in R$ vamos que

$x_1 x_2 = x_2 x_1$.

Como $x_1 \in R \Rightarrow \exists m \in M$ y $n \in \mathbb{Z}$ t.q. $x_1 = \overbrace{n_1 x + m_1}^{n_1 \text{ veces}}$
 $x_2 = n_2 x + m_2$



Instrucciones:

- Formar grupos de a 5. A cada grupo se le asigna una pregunta y se le entrega esta y otra hoja de respuesta.
- Discutir sobre los indicadores de logro, de la pregunta asignada, que cada uno de los integrantes del grupo definió en la tarea online del módulo sobre alineamiento.
- Definir en conjunto 4 indicadores finales y escribirlos tanto en esta hoja como en la otra.
- Cuando el monitor lo indique pasar la hoja 2 al siguiente grupo y recibir la de otro.
- Discutir sobre los indicadores que definieron y los que les llegaron, si lo consideraran pertinente pueden modificar parcial o completamente sus indicadores. Si además consideran que a la hoja que les llegó le falta algún indicador muy importante pueden agregarlo como indicador extra (No modifiquen los ya escritos).
- Iterar hasta que el monitor lo indique.
- Asegúrense que sus indicadores sean transversales a cualquier forma de responder la pregunta.

Pregunta	Indicador
a)	11- Compara el problema.
	12- Busca un contraejemplo
	13- Encuentra el contraejemplo
	14- Concluye que la proposición es falsa
b)	11- Caso Base
	12- H. post base inductiva
	13- Paso inductivo
	14- Concluye

$$\Rightarrow X_1 \cdot X_2 = (n_1 x + m_1)(n_2 x + m_2)$$

$$= (n_1 x)(n_2 x) + (n_1 x)m_2 + m_1(n_2 x) + m_1 m_2$$

$$= (n_1 n_2)x^2 + n_1(xm_2) + n_2(m_1 x) + m_1 m_2$$

Inducción + distributividad. (*)

$$= (n_2 x)(n_1 x) + n_1(m_2 x) + n_2(x m_1) + m_2 m_1$$

$m_1, m_2 \in M$

Inducción + dist.

(*)

$$= (n_2 x + m_2)(n_1 x + m_1) = X_2 \cdot X_1$$

$$\Rightarrow M = R \quad \text{pues } |M| = p \Rightarrow |M| = p^2 \Rightarrow M = R$$

(*) P.D.Q.

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

$$k(y_1 y_2) = (k y_1) y_2 = y_1 (k y_2)$$

Inducción en $\mathbb{N}$ y para negativos, usar

$$\text{que: } -(xy) = (-x)(y) = x(-y) \wedge -(x+y) = -x-y$$

~~CB y $y=0$~~

~~2. $(k+1)(y_1 y_2) = (k y_1 y_2 + y_1 y_2) =$~~

~~$(k+1)(y_1 y_2) = (k y_1 y_2 + y_1 y_2) =$~~

~~$(k y_1 y_2 + y_1 y_2) = (k y_1) y_2 + y_1 y_2 = (k y_1 + y_1) y_2 = (k+1) y_1 y_2$~~

Instrucciones:

- Formar grupos de a 5. A cada grupo se le asigna una pregunta y se le entrega esta y otra hoja de respuesta.
- Discutir sobre los indicadores de logro, de la pregunta asignada, que cada uno de los integrantes del grupo definió en la tarea online del módulo sobre alineamiento.
- Definir en conjunto 4 indicadores finales y escribirlos tanto en esta hoja como en la otra.
- Cuando el monitor lo indique pasar la hoja 2 al siguiente grupo y recibir la de otro.
- Discutir sobre los indicadores que definieron y los que les llegaron, si lo consideraran pertinente pueden modificar parcial o completamente sus indicadores. Si además consideraran que a la hoja que les llegó le falta algún indicador muy importante pueden agregarlo como indicador extra (No modifiquen los ya escritos).
- Iterar hasta que el monitor lo indique.
- Asegúrense que sus indicadores sean transversales a cualquier forma de responder la pregunta.

Pregunta	Indicador
a)	11- Interpreta correctamente el significado de los cuantificadores
	12- Identificar caso extremo ($n=7$)
	13- Formular correctamente un contraejemplo
	14- Establece /concluye correctamente el valor de verdad de la proposición
b)	11- Verificar correctamente el caso base
	12- Formular correctamente H.I
	13- Desarrollar inducción para $n+1$ - (pdg)
	14- Utiliza correctamente H.I para así concluir la demostración

$$f(xy) = (xy)^P = x^P y^P \leftarrow \text{anillo conmutativo} \\ + \text{inducción}$$

$$f(1) = 1^P = 1$$

neutro de $\cdot$

$$(xy)^{n+1} = (xy)^n (xy) \\ = x^n y^n xy \\ = x^{n+1} y^{n+1}$$

$$f(x+y) = (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = x^n + y^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

anillo conmutativo.
+ inducción.

$$(x+y)^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right) (x+y) \\ = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}$$

commutatividad $\nearrow$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k$$

$ax+bx, (a,b \in \mathbb{Z})$
 $= (a+b)x$
 $\nearrow$ Inducción

$$= \sum_{k=1}^n \cancel{\binom{n}{k}} x^{n+1-k} y^k \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) + \binom{n}{0} x^{n+1} y^0 \\ + \binom{n}{n+1} x^{n+1-n-1} y^{n+1}$$

Pregunta	Indicador
a)	11- Reconocer y aplicar verificación simbólica
	12- Utilizar la definición de implicancia
	13- Aplicación de la distribución
	14- Aplicación de ley de Morgan
	15- Llegar a la equivalencia y justificar
	16-
	17-
	17-
b)	11- Dar un valor de verdad a un término o expresión
	12- Utilizar tecnologías y prop. de tablas de verdad
	13- Repetir con el valor de Verdad contrario
	14- Concluir correctamente la equivalencia
	15-
	16-
	17-
	17-

Vamos que para $n = p$.

$$\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} x^{p-k} y^p = 0$$

En efecto, $\binom{p}{k} = \frac{p!}{(p-k)!k!} \in \underline{\underline{\mathbb{N}}}$.

Cmo p primo $\nmid k! \mid \frac{p!}{(p-k)!} \Rightarrow k! \mid \frac{(p-1)!}{(p-k)!}$

$$\Rightarrow \binom{p}{k} = p \cdot l$$

$$\Rightarrow \binom{p}{k} x^{p-k} y^p = p \cdot l x^{p-k} y^p$$

$$= \underbrace{l x^{p-k} y^p + \dots + l x^{p-k} y^p}_{p \text{ veces}}$$

$$= \underbrace{(1 + \dots + 1)}_p l x^{p-k} y^p = 0 \cdot l x^{p-k} y^p = 0$$

f es morfismo //

Instrucciones:

- Formar grupos de a 5. A cada grupo se le asigna una pregunta y se le entrega esta y otra hoja de respuesta.
- Discutir sobre los indicadores de logro, de la pregunta asignada, que cada uno de los integrantes del grupo definió en la tarea online del módulo sobre alineamiento.
- Definir en conjunto 4 indicadores finales y escribirlos tanto en esta hoja como en la otra.
- Cuando el monitor lo indique pasar la hoja 2 al siguiente grupo y recibir la de otro.
- Discutir sobre los indicadores que definieron y los que les llegaron, si lo consideraran pertinente pueden modificar parcial o completamente sus indicadores. Si además consideran que a la hoja que les llegó le falta algún indicador muy importante pueden agregarlo como indicador extra (No modifiquen los ya escritos).
- Iterar hasta que el monitor lo indique.
- Asegúrense que sus indicadores sean transversales a cualquier forma de responder la pregunta.

Pregunta	Indicador
a)	1- Demuestra manejo en conceptos básicos y científicos
	12- Determina que la proposición es falsa
	13- Justifica adecuadamente, puede ser con un contraejemplo
	14- Lee proposiciones lógicas
b)	1- Realiza el caso base
	12- Detecta la hipótesis inductiva
	13- Ejecuta paso inductivo correctamente
	14- Desarrolla el paso inductivo y reconoce la hipótesis inductiva

1.0
1.0