Elementos de Algebra MA3101
Profesor: Ángel Pardo J.
Auxiliares: Alonso Cancino T.
Juan Pedro Ross O.
Fecha: Viernes 16 de Agosto 2019

Trabajo dirigido, Control 1

P1. Sea p primo y $m \in \mathbb{N}$.

a) Mostrar que $\prod_{i=1}^{m} C_p \ncong C_{p^m}$.

b) Usando lo anterior proponga cuales los grupos abelianos de orden p^m y luego demuestre por inducción que efectivamente no hay más.

c) Clasificar todos los grupos abelianos finitos.

P2. a) Sea G un grupo finito y p primo que divide a $|G|$. Entonces para todo p-subgrupo S de G, se cumple que $S \in S_p(G)$ si y solo si p no divide a $[G : S]$

b) Demuestre que si p, q son primos distintos y $|G| = pq^2$, entonces G no es simple.

P3. a) Sean G y H dos grupos tales que $|G| = n, |H| = m$, con $mcd(n, m) = 1$. Muestre que el único morfismo entre G y H es el trivial.

b) Demuestre que si un automorfismo fija más de la mitad de los elementos de un grupo, entonces es la identidad.

c) Sean $H, N \trianglelefteq G$ con $N \leq H$, entonces $G/H \cong (G/N)/(H/N)$.

P4. a) Sean $A \leq B \leq C$, con $[C : A] = p$, con p primo, entonces $A = B \vee B = C$.

b) Sea G un grupo, probar que:

$$G \text{ es abeliano } \iff \text{La función dada por } \psi(g) = g^{-1} \text{ es un automorfismo.}$$

c) Sea G grupo, probar que si G tiene un numero finito de subgrupos, entonces G es finito.

P5. Demuestre que A_4 tiene un subgrupo isomorfo a $C_2 \times C_2$