Elementos de Algebra MA3101
Profesor: Ángel Pardo J.
Auxiliares: Alonso Cancino T.
Juan Pedro Ross O.
Fecha: Viernes 23 de Agosto 2019

Auxiliar 3

P1. (Teorema de Lagrange Generalizado) Sea G un grupo (no necesariamete finito) y $H \leq G$, entonces $|G| = |G/_{\approx_H} \times H|$.

P2. (Relación de Conjugación) Sea $\mathcal{C}$ la relación definida en $(G, *)$ por $a\mathcal{C}b : \exists g \in G, ag = gb$.

a) Demuestre que $\mathcal{C}$ es de equivalencia.

b) Sea $H \leq G$, demuestre que

$$H \trianglelefteq G \Leftrightarrow H = \bigcup_{\substack{T \in G/_{\mathcal{C}} \\ T \cap H \neq \emptyset}} T$$

P3. (Clases laterales) Sea G grupo, $a, b \in G$ y $H, K \leq G$. Muestre que si $Ha \cap Kb \neq \emptyset$, entonces $\exists c \in G$ tal que $Ha \cap Kb = (H \cap K)c$.

P4. Grupos residualmente finitos) Un grupo G se dice residualmente finitio ssi

$$\forall g \in G \setminus \{e_G\}, \exists F \text{ grupo finito y } \varphi : G \to F \text{ morfismo tal que } \varphi(g) \neq e_F.$$

a) Demuestre que todo grupo finito es residualmente finito.

b) ¿Lo es también $\mathbf{Z}$?

c) ¿Es cierto que si $H \leq G$, entonces H también lo es?

d) Sea $H \leq G$ con $[G : H] < \infty$. Encuentre $N \trianglelefteq G : N \subseteq H$ y $[G : N] < \infty$.

e) Concluya que

$$M = \bigcap_{\substack{H \leq G \\ [G:H] < \infty}} H = \bigcap_{\substack{N \trianglelefteq G \\ [G:N] < \infty}} N \text{ y que } M \trianglelefteq G.$$

f) Demuestre que G es residualmente finito ssi $M = \{e_G\}$.