Auxiliar 1

P1.- Dado un grupo $(G,*)$ y un elemento $a\in G$, junto a un escalar $k\in\mathbb{Z}$, definimos el producto iterado como:

$$a^k = \begin{cases} e & \text{si } k=0 \\ a^{k-1}\cdot a & \text{si } k>0 \\ (a^{-1})^{-k} & \text{si } k<0 \end{cases}$$

a) Demuestre que $\forall a\in G$, $\forall k\in\mathbb{Z}$, $a^k\in G$ y $(a^k)^{-1}=(a^{-1})^k$.

1º Supongamos $k\geq 0$ y razonemos por inducción.

CB: $k=0$ | $a^0=e\in G$, $(a^0)^{-1}=e^{-1}=e=e^0$

PI: $k\Rightarrow k+1$ | $a^{k+1} \underset{\text{def}}{=} \underbrace{a^k}_{\substack{\in G\\ \text{HI}}} * \underbrace{a}_{\in G} \in G$, pues $*$ es lci

$$(a^{k+1})^{-1}=(a^k * a)^{-1} = a^{-1}*(a^k)^{-1} \underset{\text{HI}}{=} a^{-1}*(a^{-1})^k \underset{\text{def}}{=} (a^{-1})^{k+1}$$

Ahora si $k<0$

$a^k=(a^{-1})^{-k}$ como $a^{-1}\in G$ $\wedge$ $-k>0$, utilizamos lo recién probado para concluir que $a^k\in G$

además $(a^k)^{-1} = \left[(a^{-1})^{-k}\right]^{-1} = \left[(\cancel{a^{-1}})^{\cancel{-1}}\right]^{-k} = a^{-k} \underset{\text{def}}{=} (a^{-1})^k$

¿Cómo separo esto? D:

Para calcular la suma

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k^2}\frac{n+k^2}{(n+j-1)(n+j)}$$

te sugieren primero encontrar A y B que cumplan

$$\frac{1}{(n+j-1)(n+j)}=\frac{A}{n+j-1}+\frac{B}{n+j}$$

Encuentre los valores para A y B y luego calcule la suma.

Propuesto: 1.- $a^k * a^l = a^{k+l}$

2.- $(a^p)^q = a^{pq}$.

Para lo que sigue consideremos el grupo cíclico generado por a, $\langle a \rangle = \{ a^k : k \in \mathbb{Z} \}$

i) Estudie una caracterización para los grupos cíclicos generados por a de orden infinito.

Notemos que $f: \mathbb{Z} \to \langle a \rangle$
$k \to a^k$

es morfismo (gracias al propuesto 1) y claramente es sobreyectivo.

Veamos que ocurre con la inyectividad.

$$f(k_1) = f(k_2) \Rightarrow a^{k_1} = a^{k_2} \Rightarrow a^{k_1 - k_2} = e$$

Supongamos que $k_1 - k_2 \neq n \neq 0$, la idea es que como $a^n = e$ cada n vueltas siempre se llegará a e por lo que $|\langle a \rangle| = n$!

En efecto: Consideremos $n = \min\{k : a^k = e\}$

luego $\forall b \in \langle a \rangle \ \exists k_1 : b = a^{k_1}$

¿Cómo separo esto? D:

Para calcular la suma

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k^2}\frac{n+k^2}{(n+j-1)(n+j)}$$

te sugieren primero encontrar A y B que cumplan

$$\frac{1}{(n+j-1)(n+j)}=\frac{A}{n+j-1}+\frac{B}{n+j}$$

Encuentre los valores para A y B y luego calcule la suma.

Por teo de la div $\exists p, q \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq q \leq n-1$

t_q $k_1 = pn + q$

$\Rightarrow a^{k_1} = a^{pn} \cdot a^{q} = (a^{n})^{p} \cdot a^{q} = e^{p} \cdot a^{q} = e a^{q} = a^{q}$

Luego $\forall b \in \langle a \rangle$ $\exists q \in \{0, \dots, n-1\}$ t_q

$b = a^{q} \Rightarrow |\langle a \rangle| \leq n$

Luego si $|\langle a \rangle| = +\infty \Rightarrow f$ isomorfismo.

Por otro lado es claro que si f es isomorfismo de $\mathbb{Z} \to G \Rightarrow |G| = +\infty$ y $\forall g \in G$ $\exists b \in \mathbb{Z}$ t_q

$f(b) = g = f(1 + \_ + 1) = g = f(1) * \_ * f(1) = (f(1))^{b}$

$\Rightarrow G = \langle f(1) \rangle$.

ii) Demuestre que $H \leq \langle a \rangle \Leftrightarrow \exists p \geq 0 : H = \langle a^{p} \rangle$.

$\Leftarrow)$ $\langle a^{p} \rangle$ es grupo y $H \leq \langle a \rangle$ //

$\Rightarrow)$ Si $H = \{e\} \Rightarrow p = 0$ //

Sino $\forall h \in H$ $\exists P_h : h = a^{P_h}$ sabemos que

Como $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H \wedge h^{-1} = (a^{-1})^{-P_h}$

$A = \{j > 0 : a^{j} \in h\} \neq \phi$

¿Cómo separo esto? D:

Para calcular la suma

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k^2}\frac{n+k^2}{(n+j-1)(n+j)}$$

te sugieren primero encontrar A y B que cumplan

$$\frac{1}{(n+j-1)(n+j)}=\frac{A}{n+j-1}+\frac{B}{n+j}$$

Encuentre los valores para A y B y luego calcule la suma.

Sea $p = \min A$, luego $\forall p_h \in \exists r, s \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq s \leq p-1$

tq $h = \underbrace{a^{p_h}}_{\in H} = a^{rp+s} = \underbrace{a^{rp}}_{\in H} \circ a^s$

$\Rightarrow a^s = h * a^{-rp} \in H \Rightarrow s \in A \cup \{0\}$ pero $s < p \Rightarrow s = 0$

$\Rightarrow h = (a^p)^r$ //

iii) Concluya cuales son los únicos subgrupos de $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle \Rightarrow H \leq G \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$ tq $H = \langle \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} \rangle$

$\Rightarrow H = n\mathbb{Z}$ //

P2 Dado un grupo $(G, \circ)$ con neutro e y $a, b, c \in G$ resolver los siguientes sistemas de ecuaciones

1) $\begin{cases} x^2 = b \\ x^5 = e \end{cases} \Rightarrow x^4 = b^2 \Rightarrow x \cdot x^4 = x b^2 = e \Rightarrow x = (b^2)^{-1}$

2) $\begin{cases} x^2 a = b x c^{-1} \\ acx = xac \end{cases} \Rightarrow x^2 = b x c^{-1} a^{-1} \Rightarrow x = b x c^{-1} a^{-1} x^{-1}$

$\Rightarrow x = b x (xac)^{-1} = b x (acx)^{-1}$

$\Rightarrow x = b x \circ x^{-1} \circ c^{-1} \circ a^{-1} = b c^{-1} a^{-1}$ //

¿Cómo separo esto? D:

Para calcular la suma

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k^2}\frac{n+k^2}{(n+j-1)(n+j)}$$

te sugieren primero encontrar A y B que cumplan

$$\frac{1}{(n+j-1)(n+j)}=\frac{A}{n+j-1}+\frac{B}{n+j}$$

Encuentre los valores para A y B y luego calcule la suma.

P3) Sea una familia de grupos $\{(G_a, *_a)\}_{a\in A}$, definimos el conjunto

$$G = \prod_{a\in A} G_a = \{(X_a)_{a\in A} : x_a \in G_a\}.$$

con la operación $(x*y)_a = x_a *_a y_a$

Propuesto: Verifique $(G,*)$ es un grupo.

b) Definimos la suma directa de la familia de grupos como

$$\bigoplus_{a\in A} G_a = \{(X_a)_{a\in A} : |\{a\in A : X_a \neq e_a\}| < +\infty\}$$

Demuestre que $H \leq G$

$H \leq G$ ✓, sea $x, y \in H$

$\Rightarrow$ x tiene una cantidad n finita de no neutros,

como $y^{-1} = (Y_a^{-1})_{a\in A}$ y que $Y_a = e_a \Rightarrow Y_a^{-1} = e_a$

$$|\{a\in A : Y_a \neq e_a\}| = |\{a\in A : Y_a^{-1} \neq e_a\}| = m$$

$$\Rightarrow |\{x * y^{-1} \neq e_a\}| \leq \text{máx}\{m, n\} < +\infty$$

$\Rightarrow x * y^{-1} \in H$

$\therefore H \trianglelefteq G$ //

¿Cómo separo esto? D:

Para calcular la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k^2} \frac{n+k^2}{(n+j-1)(n+j)}$$

te sugieren primero encontrar A y B que cumplan

$$\frac{1}{(n+j-1)(n+j)} = \frac{A}{n+j-1} + \frac{B}{n+j}$$

Encuentre los valores para A y B y luego calcule la suma.

Ahora caracterice los conjuntos $\tilde{G}_b$ dados por

$$\tilde{G}_b = \{(x_a)_{a\in A} : x_a \neq e_a \Rightarrow a = b\}$$

$x \in \tilde{G}_b$ puede o bien tener solo neutros o solo la coordenada b distinta de e_a

$$\Rightarrow \tilde{G}_b = \{(e_a) : a\in A, (e_1, e_2, \ldots, g_b, e_{b+1}, \ldots) : g_b \in G_b\}$$

d) Muestre que $\forall z \in H$, $\forall y \in \tilde{G}_b$ se cumple que $z * y * z^{-1} \in \tilde{G}_b$

$$(z * y * z^{-1})_a = z_a *_a y_a * z_a^{-1} \quad \text{si } a \neq b$$

$$= z_a * e_a * z_a^{-1} = z_a * z_a^{-1} = e_a$$

$$\text{si } a = b \Rightarrow \underbrace{z_a}_{\in G_b} *_a \underset{\in G_b}{y_a} * \underset{\in G_b}{z_a^{-1}} \in G_b.$$

P4) El grupo diedral D_{2n} es el grupo de todas las simetrías de un polígono regular de $n \geq 3$ lados (cualquier operación que manda vértices consecutivos en vértices consecutivos sin deformar el polígono)

¿Cómo separo esto? D:

Para calcular la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k^2} \frac{n+k^2}{(n+j-1)(n+j)}$$

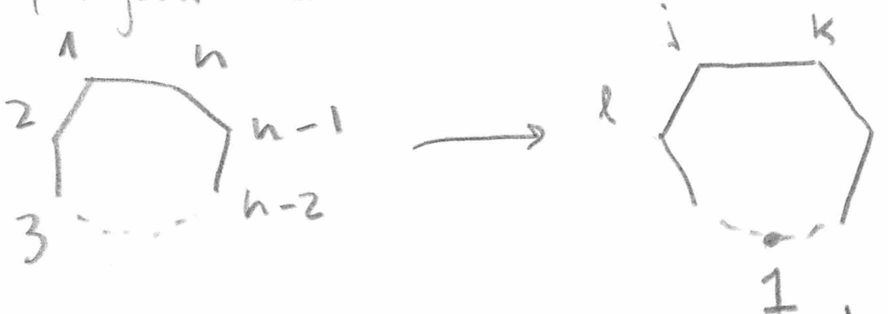
te sugieren primero encontrar A y B que cumplan

$$\frac{1}{(n+j-1)(n+j)} = \frac{A}{n+j-1} + \frac{B}{n+j}$$

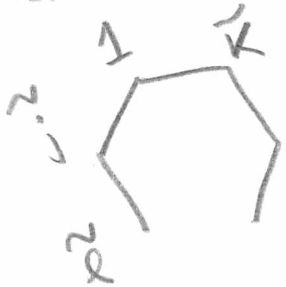
Encuentre los valores para A y B y luego calcule la suma.

a) Muestre que $D_{2n} = \{id, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\} = A$ donde r es la rotación a la izquierda y s es una simetría axial fija. Concluya cuánto vale su cardinal.

Es claro que $A \subseteq D_{2n}$, luego dado un polígono de n lados



Primero hacemos todas las rotaciones posibles hasta devolver el 1 a su lugar



Cada rotación movió un lugar al 1 por lo que se necesitaron $a \in \{0, \dots, n-1\}$.

Como los vértices consecutivos se mantienen $\Rightarrow \tilde{j} \in \{2, n\}$, si $\tilde{j} = 2 \Rightarrow \tilde{\ell} = 3 \Rightarrow \dots \Rightarrow \tilde{k} = n$

Luego la transformación es equivalente a r^{n-a}

si $\tilde{j} = n \Rightarrow \tilde{\ell} = n-1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \tilde{k} = 2$, luego haciendo una sola simetría axial se recupera

por ende la transformación es equivalente a sr^{n-a} //

¿Cómo separo esto? D:

Para calcular la suma

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k^2}\frac{n+k^2}{(n+j-1)(n+j)}$$

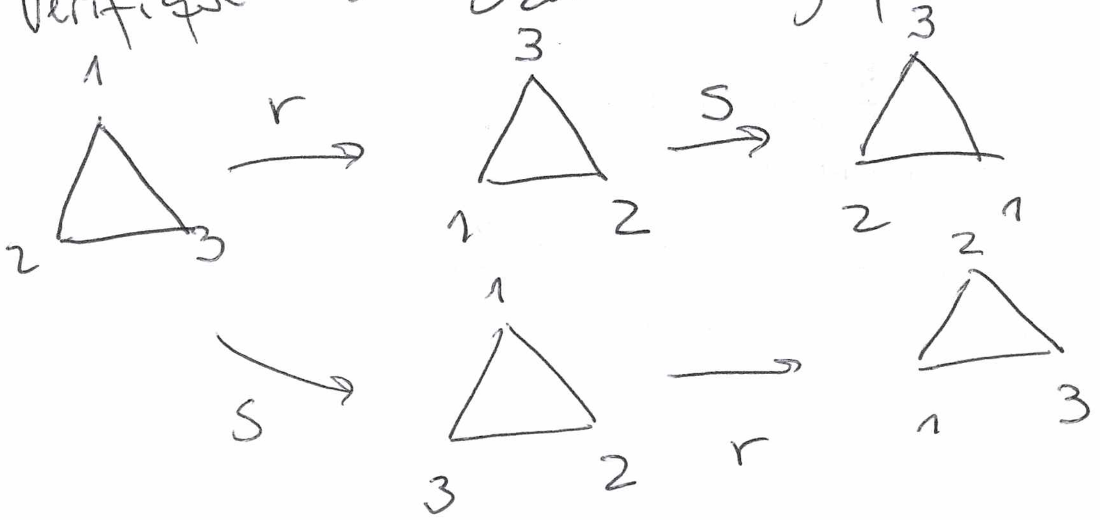
te sugieren primero encontrar A y B que cumplan

$$\frac{1}{(n+j-1)(n+j)}=\frac{A}{n+j-1}+\frac{B}{n+j}$$

Encuentre los valores para A y B y luego calcule la suma.

Se concluye que su cardinal es $2n$.

b) Verifique si D_{2n} es grupo abeliano.



$rs \neq sr$ $\therefore$ No abeliano.

c) Muestre que $D_{2n} = \langle r, s \rangle$

forma 1) $A \subseteq \langle r, s \rangle \subseteq D_{2n} = A$

forma 2) $x \in \langle r, s \rangle \Rightarrow x = r^{r_1} s^{s_1} r^{r_2} s^{s_2} \dots$ $\quad 0 \le r_1 \le n-1 \wedge 0 \le s \le 1$

como $r^n = id \wedge s^2 = id \Rightarrow \forall i \quad 1 \le r_i \le n-1 \wedge 1 = s$.

como $r^0 = s^0 = id$ tomamos

$r^{r_1} s \, r^{r_2} s \dots$

notemos que $rsrs = id \Rightarrow$

$\Rightarrow rs = s^{-1} r^{-1} = s r^{n-1}$

$\Rightarrow$ ~~$r^{r_1} s = r^{r_1 - 1} s r^{n-1}$~~

$\Rightarrow r^{r_1} s = r^{r_1 - 1} \cdot rs = r^{r_1 - 1} \cdot s r^{n-1}$

$= r^{r_1 - 2} \cdot s \cdot r^{2(n-1)}$

$\vdots$

$= s r^{r_1 (n-1)}$

$\Rightarrow r^{r_1} s r^{r_2}$

¿Cómo separo esto? D:

Para calcular la suma

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k^2}\frac{n+k^2}{(n+j-1)(n+j)}$$

te sugieren primero encontrar A y B que cumplan

$$\frac{1}{(n+j-1)(n+j)}=\frac{A}{n+j-1}+\frac{B}{n+j}$$

Encuentre los valores para A y B y luego calcule la suma.

$x^2 a = bxc^{-1}$ $\qquad acx = xac$

$x^{-1}b^{-1}x^2 = c^{-1}a^{-1}$

$x^{-1}b^{-1}x^2x^{-1} = c^{-1}a^{-1}x^{-1}$

$x^{-1}b^{-1}x = (xac)^{-1}$

$x^{-1}b^{-1}x = (acx)^{-1}$

$x^{-1}b^{-1}x = x^{-1}c^{-1}a^{-1}$

$\cancel{x^{-1}}b^{-1}x = \cancel{x^{-1}}c^{-1}a^{-1}$

$\boxed{x = bc^{-1}a^{-1}}$

$r^{\tilde{n}}s = sr^{\tilde{n}(n-1)}$

CB: $\tilde{n} = 0$ ✓, $rs = s^{-1}r^{-1} = sr^{n-1}$

$\tilde{n} \Rightarrow \tilde{n}+1$ | $r^{\tilde{n}+1} \cdot s = r \cdot r^{\tilde{n}}s = r \cdot sr^{\tilde{n}(n-1)} = sr^{(\tilde{n}+1)(n-1)}$ //

Luego por inducción en K.

$r^{r_1}s^{s_1}r^{r_2}s^{s_2} \dots r^{r_{k+1}}s^{s_k} = s^i r^j \quad i \in \{0,1\} \quad j \in \{0, \dots, n-1\}$.

$= r^{\tilde{r}_1} s\, r^{\tilde{r}_2} s \dots r^{\tilde{r}_{k+1}} s$

$= s\, r^{\tilde{r}_1(n-1)+r_2} s \dots r^{\tilde{r}_{k+1}} s$

$= s \cdot s^i r^j$

$= s^{i+1} r^j$

¿Cómo separo esto? D:

Para calcular la suma

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k^2}\frac{n+k^2}{(n+j-1)(n+j)}$$

te sugieren primero encontrar A y B que cumplan

$$\frac{1}{(n+j-1)(n+j)}=\frac{A}{n+j-1}+\frac{B}{n+j}$$

Encuentre los valores para A y B y luego calcule la suma.