Elementos de Algebra MA3101
**Profesor:** Ángel Pardo J.
**Auxiliares:** Alonso Cancino T.
Juan Pedro Ross O.
**Fecha:** Viernes 9 de Agosto 2019

# Auxiliar 1

**P1.** Dado un grupo $(G, *)$ y un elemento $a \in G$, junto a un escalar $k \in \mathbf{Z}$, definimos el producto iterado como

$$a^k = \begin{cases} e & k = 0 \\ a^{k-1} * a & k > 0 \\ (a^{-1})^{-k} & k < 0 \end{cases}$$

a) Demuestre que $\forall a \in G, \forall k \in \mathbf{Z}$ se cumple que $a^k \in G$ y $(a^k)^{-1} = (a^{-1})^k$

b) **Propuesto:** Demuestre que $\forall a \geq G, \forall k, l \in \mathbf{Z}$ se cumple que $a^k * a^l = a^{k+l}$
**Indicación:** Analice por separado los casos 1) $k \geq 0, l \geq 0$, 2) $k \leq 0, l \leq 0$, 3) $k \geq 0, l \leq 0$. Para el primero razone por inducción y para el tercero probar primero que $a^{l+1} = a * a^l$ también se cumple cuando $l + 1 \leq 0$

c) **Propuesto:** Demuestre que $\forall a \in G, \forall p, q \in \mathbf{Z}$ se cumple que $(a^p)^q = a^{pq} \in G$ y $(a^k)^{-1} = (a^{-1})^k$
**Indicación:** Haga inducción sobre el caso $q \geq 0$ y luego analice que ocurre si es negativo.

d) Para lo que sigue considere el grupo cíclico generado por a, $\langle a \rangle = \{a^k : k \in Z\}$, cuyo orden corresponde a su cardinal.

i) Estudie una caracterización para los grupos cíclicos generados por $a$ de orden infinito

ii) Demuestre que $H \leq \langle a \rangle \iff \exists p \geq 0 : \; H = \langle a^p \rangle$.

iii) Concluya cuales son los únicos subgrupos de $\mathbf{Z}$.

**P2.** Dado un grupo $(G, \cdot)$, con neutro $e$ y $a, b, c \in G$, resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2 = b \\ x^5 = e \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 a = bxc^{-1} \\ acx = xac \end{cases}$

**P3.** Sea una familia de grupos $\{(G_a, *_a)\}_{a \in A}$, definimos el conjunto:

$$G = \prod_{a \in A} G_a = \{(x_a)_{a \in A} : x_a \in G_a\}$$

junto a la operación $(x * y)_a = x_a *_a y_a$.

a) **Propuesto:** Verifique que $(G, *)$ es un grupo.

b) Definamos la suma directa de la familia de grupos como:

$$H = \bigoplus_{a \in A} G_a = \{(x_a)_{a \in A} : |\{a \in A : x_a \neq e_a\}| < \infty\}$$

Demuestre que $H \leq G$.

c) Ahora caracterice los siguientes conjuntos $\tilde{G}_b$ definidos por:

$$\tilde{G}_b = \{(x_a)_{a\in A} : x_a \neq e_a \Rightarrow a = b\}$$

d) Muestre que $\forall z \in H, \forall y \in \tilde{G}_b$ se cumple que $z * y * z^{-1} \in \tilde{G}_b$

**P4.** El grupo diedral $D_{2n}$ es el grupo de todas las simetrías de un polígono regular de $n \geq 3$ lados (cualquier operación que manda vértices consecutivos en vértices consecutivos sin deformar el polígono).

a) Muestre que $D_{2n} = \{id, r, ..., r^{n-1}, s, sr, ..., sr^{n-1}\}$, donde $r$ es la rotación a la izquierda y $s$ es una simetría axial fija. Concluya cuanto vale su cardinal.

b) Verifique si $D_{2n}$ es un grupo abeliano.

c) Muestre que $D_{2n} = \langle r, s\rangle$.