

MA1101-5 Introducción al Álgebra

Profesor: Maya Stein

Auxiliar: Juan Pedro Ross

Fecha: Jueves 12 de Mayo del 2016



Auxiliar 9: Estructuras Algebraicas

Resumen:
Sea $(A, *)$ una estructura algebraica.

<ul style="list-style-type: none"> ▪ $*$ es asociativa si: ($\forall x, y, z \in A$) $(x * y) * z = x * (y * z)$. ▪ Sea $e \in A$. Se dice que e es elemento neutro para $*$ si ($\forall a \in A$) $e * a = a * e = a$. ▪ Dado e neutro para $*$ y $x \in A$. Diremos que x tiene 	<ul style="list-style-type: none"> inverso si ($\exists y \in A$) $y * x = x * y = e$. ▪ $*$ es conmutativa si ($\forall x, y \in A$) $x * y = y * x$. ▪ $a \in A$ absorbente si ($\forall x \in A$) $a * x = x * a = a$ ▪ $a \in A$ idempotente si $a * a = a$
---	---

P1. Estudie las propiedades (Existencia de neutro, absorbente, asociatividad y conmutatividad) de las siguientes estructuras algebraicas:

- (I) $(\mathcal{P}(E), \cap)$
- (II) $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \text{máx})$, donde máx es la operación de máximo entre dos elementos.
- (III) $(\{\text{Piedra}, \text{Papel}, \text{Tijera}\}, \star)$, donde \star , entrega la que gana o empata en el cachipún.

P2. Se define en \mathbb{R}^2 la ley de composición interna $*$ por

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d).$$

- (I) Estudiar la conmutatividad y asociatividad de $*$.
- (II) Determine el neutro en $(\mathbb{R}^2, *)$.
- (III) Determine qué elementos son invertibles para $*$ y calcule sus inversos.
- (IV) Determine los elementos idempotentes en $(\mathbb{R}^2, *)$.

P3. Consideremos $(A, *)$ una estructura algebraica asociativa en A . Sea $a \in A$ fijo, se define:

$$B = \{x \in A \mid a * x = x * a\}$$

Demuestre que:

- (I) $(\forall x, y \in B) x * y \in B$.
- (II) Si $e \in A$ es neutro, entonces $e \in B$.
- (III) Si $x \in B$ tiene inverso x^{-1} , entonces $x^{-1} \in B$

P4. (a) Pruebe que todo intervalo de la forma (a, b) $a < b$ cumple que $|(a, b)| = |\mathbb{R}|$
 (b) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto infinito no numerable y sea $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos tales que $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i = A$. Demuestre que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que A_k es infinito no numerable.
 (c) Pruebe que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ no es numerable.
Indicación: $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}$ una cantidad numerable de veces. Además razone *uuuuuuu parecido a la demostración de $[0, 1]$ no numerable.*