

Auxiliar 3

P4] tenemos el campo $\vec{F} = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}}, z \right]$

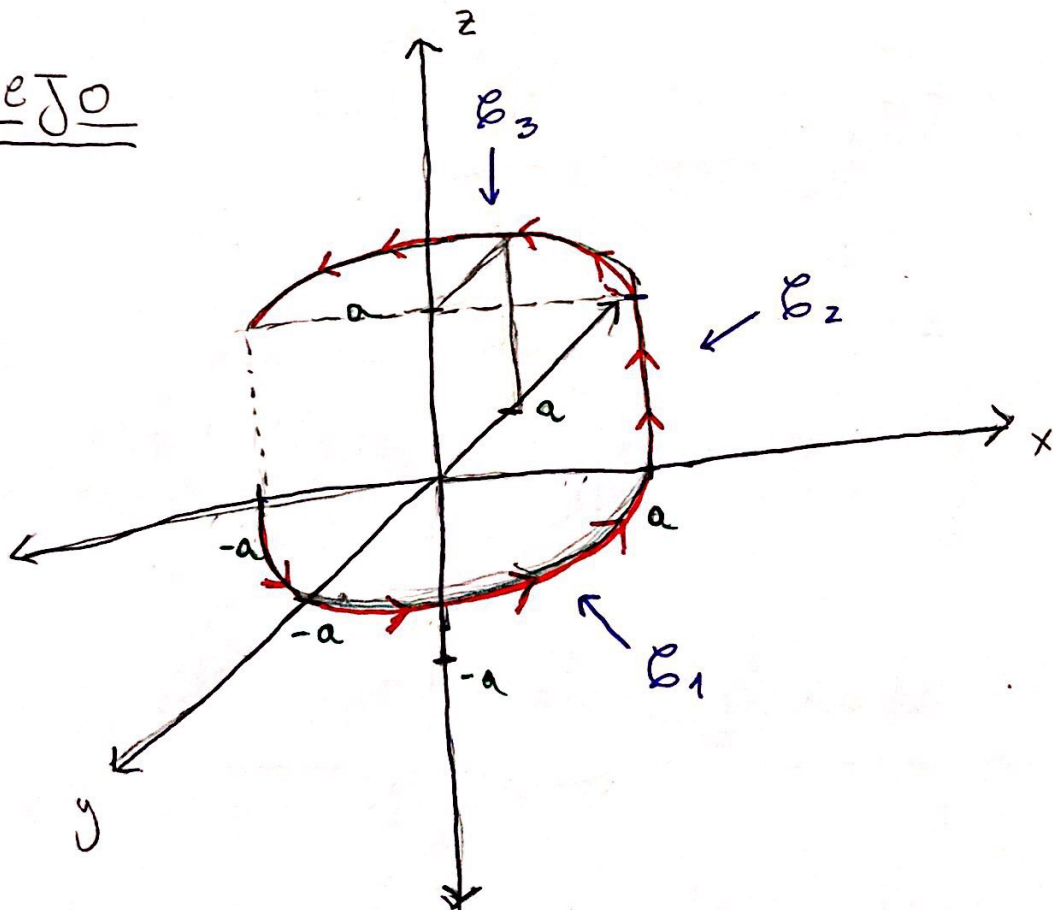
y las curvas parametrizadas

$$\Gamma_1(t) = (a \cos(t), a \sin(t), 0) \quad t \in [\pi, 2\pi]$$

$$\Gamma_2(t) = (1-t)(a, 0, 0) + t(a, 0, a) \quad t \in [0, 1]$$

$$\Gamma_3(t) = (a \cos(t), a \sin(t), a) \quad t \in [0, \pi]$$

Bosquejo



El primer impulso para calcular la integral, sería calcular $\Gamma_i'(t)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, y usar las parametrizaciones de forma explícita, pero hay algo más ingenioso:

Notemos que si $f := \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{z^2}{2}$

$$\Rightarrow \vec{F} = \nabla f \text{ (en cartesianas).}$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 \int_{C_i} \underbrace{\nabla f(\Gamma_i(t)) \cdot \Gamma_i'(t)}_{\frac{df(\Gamma_i(t))}{dt}} dt$$

$$\stackrel{+FC}{\Rightarrow} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\Gamma_1(t)) \Big|_{\pi}^{2\pi} + f(\Gamma_2(t)) \Big|_0^1 + f(\Gamma_3(t)) \Big|_0^{\pi}$$

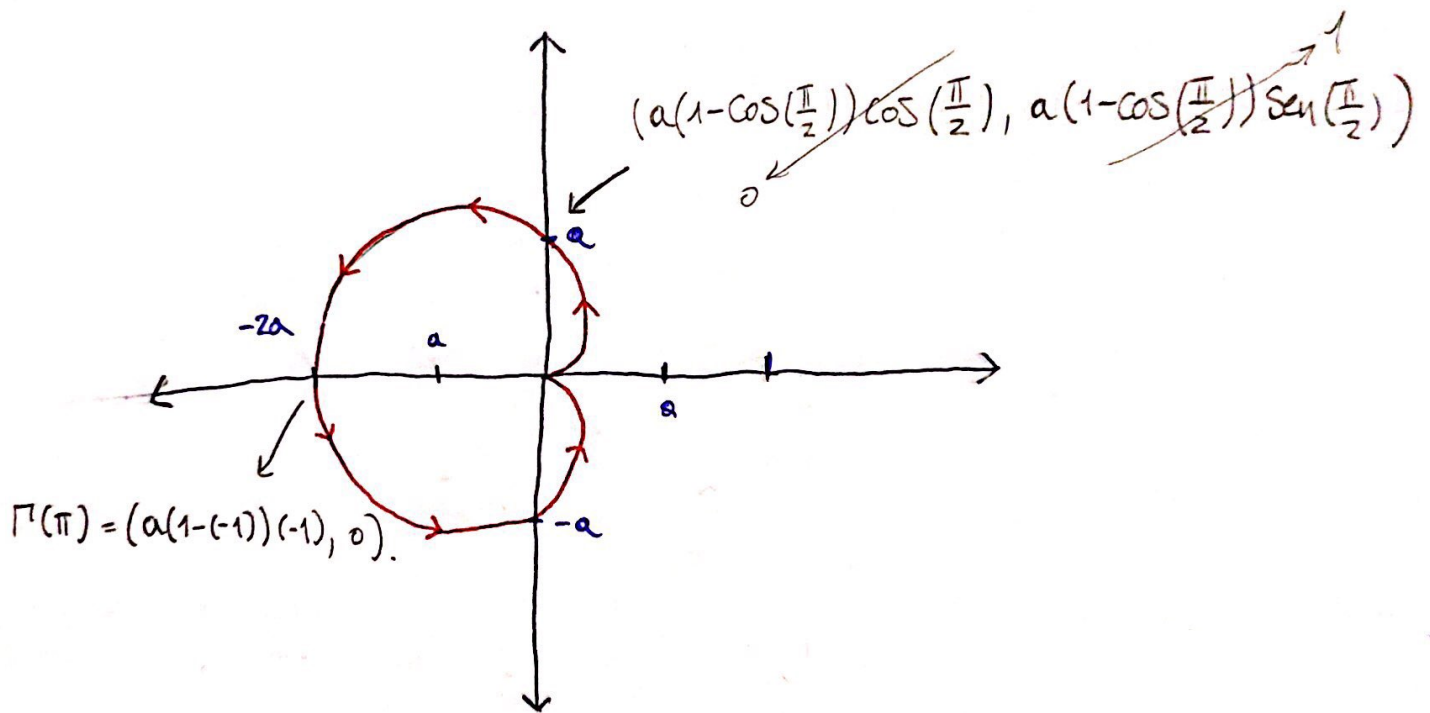
$$= \underbrace{[f(\Gamma_1(2\pi)) - f(\Gamma_1(\pi))]}_0 + \underbrace{[f(\Gamma_2(1)) - f(\Gamma_2(0))]}_{\frac{a^2}{2}} + \underbrace{[f(\Gamma_3(\pi)) - f(\Gamma_3(0))]}_0$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{a^2}{2} \quad \checkmark$$

P5] Se tiene que se cumple $\rho(\theta) = a(1 - \cos(\theta))$,
 $a > 0, \theta \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \Gamma(t) = (a(1 - \cos(t)) \cos t, a(1 - \cos(t)) \sin t).$$

Algunos (los románticos) recordarán que esta es la parametrización de una cardioide:



Nuevamente, como en la P4, notamos que si

$$f = \ln(x^2 + y^2 + 1) + \sin(x^2 y^2) \Rightarrow \vec{F} = \nabla f$$

$$\Rightarrow \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(2\pi) - f(0) = 0 \quad \checkmark$$

Nota: Si lo intentan hacer de forma explícita es muy difícil hacer la integral.