MA2002-4 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Carlos Conca
Auxiliares: Matías Altamirano, Juan d'Etigny

Auxiliar 3

20 de agosto 2019

P1.- *a*) Si $\hat{k}$ es el vector unitario según el eje Z en el plano cartesiano, θ el ángulo cenital y $\hat{r}$ el vector unitario radial en esféricas, demuestre que

$$\hat{k} = \cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}$$

b) Considere para un α real, el campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definido por

$$f = \frac{\alpha}{4\pi}\frac{\hat{k}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

Calcule $F = -\nabla f$, expresado en la base de coordenadas esféricas.

c) Considere ahora el campo vectorial $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$A = \frac{\alpha}{4\pi}\frac{\hat{k}\times\hat{r}}{r^2}$$

Calcule su rotor $\nabla \times A$.

P2.- Suponga que un sólido ocupa un volumen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, sobre el cual actúa una fuerza $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ generando que cada punto $x \in \Omega$ se desplace a $x+u(x)$, donde el desplazamiento u es también a valores en $\mathbb{R}^N$ y satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-\mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla(div(u)) = f, \quad \text{en } \Omega$$

donde $\mu, \lambda > 0$ son las llamadas constantes de Lamé que caracterizan al sólido como un medio homogéneo e isotrópico. Se definen a continuación las siguientes matrices:

$$e(u) = \frac{1}{2}(J(u) + J(u)^T) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)_{1\leq i,j\leq N} \quad , \quad \sigma(u) = 2\mu e(u) + \lambda tr(e(u))I$$

Muestre que el sistema de ecuaciones puede ser rescrito como $-div(2\mu e(u)+\lambda tr(e(u))I) = f$, donde el operador divergencia está actuando por filas.

P3.- Considere la curva C como la mitad superior del círculo de radio 1 centrado en el origen con rotación a contrarreloj, y la porción de $y = x^2 - 1$ desde $x = -1$ hasta $x = 1$. Bosqueje C. Evalúe ahora la integral $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, donde se tiene el campo $\vec{F}(x,y) = 3y\,\vec{i} + (x^2 - y)\,\vec{j}$

P4.- Considere el campo

$$\vec{F} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z \right)$$

y curvas con sus respectivas parametrizaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 : \Gamma_1(t) &= (a\cos(t), a\,\mathrm{sen}(t), 0), & t \in [\pi, 2\pi] \\ \mathcal{C}_2 : \Gamma_2(t) &= (1-t)(a,0,0) + t(a,0,a), & t \in [0,1] \\ \mathcal{C}_3 : \Gamma_3(t) &= (a\cos(t), a\,\mathrm{sen}(t), a), & t \in [0,\pi] \end{aligned}$$

Bosqueje $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ y calcule la integral de línea sobre esta trayectoria

P5.- Considere la curva Γ sobre el plano XY descrita por la siguiente ecuación en coordenadas polares

$$\rho = a(1-\cos(\theta)), \quad a > 0, \;\; \theta \in [0, 2\pi]$$

a) Encuentre una parametrización para Γ y bosqueje esta curva

b) Calcule el trabajo efectuado por el campo vectorial

$$\vec{F} = \left(2xy^2\cos(x^2y^2) + \frac{2x}{x^2+y^2+1}, 2x^2y\cos(x^2y^2) + \frac{2y}{x^2+y^2+1} \right)$$

al dar una vuelta completa a lo largo de la curva Γ en el sentido anti-horario.