Equivalencia de Normas en $\mathbb{R}^d$

11 de agosto de 2019

Este documento está destinado a demostrar que todas las normas en $\mathbb{R}^d$ son equivalentes. Recordemos que dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|^*$ en $\mathbb{R}^d$ son equivalentes si existen constantes $K_1, K_2 > 0$ tales que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \|x\| \leq K_1 \|x\|^* \quad \text{y} \quad \|x\|^* \leq K_2 \|x\|.$$

En tal caso, escribiremos $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|^*$.

El siguiente lema muestra que la relación de equivalencias de normas es transitiva.

Lema 1 Sean $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|^*$ y $\|\cdot\|^{**}$ tres normas en $\mathbb{R}^d$. Si $\|\cdot\|^* \sim \|\cdot\|$ y $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|^{**}$ entonces

$$\|\cdot\|^* \sim \|\cdot\|^{**}.$$

Demostración. Como $\|\cdot\|^* \sim \|\cdot\|$ y $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|^{**}$ entonces existen $K_1^*, K_1^{**} > 0$ tales que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \|x\|^* \leq K_1^* \|x\| \quad \text{y} \quad \|x\| \leq K_1^{**} \|x\|^{**}.$$

Luego, definiendo $K_1 = K_1^* \cdot K_1^{**} > 0$, se tiene que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \|x\|^* \leq K_1^* \|x\| \leq K_1^* \cdot K_1^{**} \|x\|^{**} = K_1 \|x\|^{**}.$$

Análogamente, podemos construir $K_2 > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \|x\|^{**} \leq K_2 \|x\|^*.$$

Se concluye entonces que $\|\cdot\|^* \sim \|\cdot\|^{**}$, concluyendo la demostración. $\square$

Con esta consideración, para probar el resultado deseado, es suficiente con mostrar el siguiente teorema:

Teorema 2 Toda norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^d$ es equivalente a $\|\cdot\|_1$, donde $\|\cdot\|_1$ es la norma dada por

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^d |x_n|.$$

En lo que sigue, fijemos una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^d$. Mostraremos que $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$. Para esto, ocuparemos los siguientes dos Lemas:

Lema 3 Existe una constante $K_1 > 0$ tal que

$$\|x\| \leq K_1 \|x\|_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Demostración: Para cada índice $i \in \{1, \dots, d\}$, denotemos por $e_i \in \mathbb{R}^d$ al i -ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^d$, es decir, al vector cuyas coordenadas están dadas por

$$(e_i)_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Notemos que todo $x \in \mathbb{R}^d$ puede escribirse como $\sum_{i=1}^d x_i e_i$. Entonces, tomando

$$K_1 = \max\{\|e_i\| : i = 1, \dots, d\},$$

tenemos que $K_1 > 0$ (pues $\|e_i\| > 0$ para todo $i \in \{1, \dots, d\}$) y además

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^d \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^d |x_i| \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^d K_1 |x_i| = K_1 \|x\|_1,$$

donde la primera desigualdad se obtiene por desigualdad triangular. Como $x \in \mathbb{R}^d$ es arbitrario, hemos concluido que para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| \leq K_1 \|x\|_1$, lo que concluye la demostración. $\square$

Lema 4 Consideremos el conjunto

$$\mathbb{S}_1 := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_1 = 1\}.$$

Si definimos $m := \inf\{\|x\| : x \in \mathbb{S}_1\}$ tenemos que $m > 0$.

Demostración. De la definición de ínfimo, podemos encontrar una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^d$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{S}_1 \quad \text{y} \quad m \leq \|x_n\| \leq m + \frac{1}{n}.$$

Veamos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\|\cdot\|_1$ -convergente (es decir, convergente respecto a la norma $\|\cdot\|_1$). Esta subsucesión la construiremos inductivamente:

1. Consideremos primero la sucesión $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por la primera coordenada de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Notemos que

$$|x_n^1| \leq \|x_n\|_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

lo que implica que la sucesión $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada en $\mathbb{R}$. Aplicando el teorema de Bolzano, tenemos que $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente, es decir, existe una función $\varphi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ creciente y $r_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_{\varphi_1(n)}^1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r_1.$$

2. Consideremos ahora la sucesión $(x_{\varphi_1(n)}^2)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por la segunda coordenada de la sucesión $(x_{\varphi_1(n)})_{n \in \mathbb{N}}$. Notando que las mismas condiciones del paso anterior se cumplen, tenemos que $(x_{\varphi_1(n)}^2)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente, es decir, existe una función $\varphi_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ creciente y $r_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r_2.$$

3. Replicando el argumento para todo $i \in \{1, \dots, d\}$, construimos una familia de funciones crecientes $\varphi_1, \dots, \varphi_d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ y un vector $r = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, x_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_i(n)}^i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r_i.$$

Sea $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_d$. Al ser una composición de funciones crecientes, φ es también una función creciente de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Más aún, para cada $i \in \{1, \dots, d-1\}$, la sucesión $(x_{\varphi(n)}^i)$ es subsucesión de la sucesión $(x_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_i(n)}^i)$: en efecto, basta notar que la función $\phi := \varphi_{i+1} \circ \dots \circ \varphi_d$ es una función creciente y que

$$(x_{\varphi(n)}^i) = (x_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_i \circ \varphi_{i+1} \circ \dots \circ \varphi_d(n)}^i) = ((x_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_i \circ \phi(n)}^i)).$$

Por lo tanto, al ser $(x_{\varphi(n)}^i)$ una subsucesión de una sucesión convergente, entonces es también convergente y su límite es el límite de la sucesión original, es decir,

$$x_{\varphi(n)}^i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r_i.$$

Así, para cada $i \in \{1, \dots, d\}$, se concluye que $x_{\varphi(n)}^i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r_i$. Luego, es fácil ver que la subsucesión vectorial $(x_{\varphi(n)})$ debe converger al vector r con respecto a $\|\cdot\|_1$. En efecto,

$$\|x_{\varphi(n)} - r\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_{\varphi(n)}^i - r_i| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Finalmente, notemos que como $\mathbb{S}_1$ es $\|\cdot\|_1$ -cerrado, y $(x_{\varphi(n)}) \subset \mathbb{S}_1$, se tiene que $r \in \mathbb{S}_1$.

En particular, concluimos por propiedad de las normas que $r \neq 0$. Entonces, como $\|\cdot\|$ también es norma, necesariamente tenemos que $\|r\| > 0$.

Para concluir que $m > 0$, demostraremos que $\|r\| = m$. En efecto, usando la desigualdad triangular inversa y el Lema 3, podemos escribir

$$0 \leq \| \|x_{\varphi(n)}\| - \|r\| \| \leq \|x_{\varphi(n)} - r\| \leq K_1 \|x_{\varphi(n)} - r\|_1 \rightarrow 0.$$

Así, concluimos que $\|x_{\varphi(n)}\| \rightarrow \|r\|$. Pero notando que por construcción

$$m \leq \|x_{\varphi(n)}\| \leq m + \frac{1}{\varphi(n)} \rightarrow m,$$

concluimos por sándwich de sucesiones reales que

$$\|r\| = \lim_n \|x_{\varphi(n)}\| = m.$$

Esto concluye la demostración. □

Veamos ahora la demostración del Teorema 2.

Demostración (Teorema 2): Por el Lema 3, solo nos queda demostrar que existe $K_2 > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \|x\|_1 \leq K_2 \|x\|.$$

Sea $m = \inf\{\|x\| : x \in \mathbb{S}_1\}$, donde $\mathbb{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_1 = 1\}$. En el Lema 4, mostramos que $m > 0$ y por lo tanto, podemos definir $K_2 = m^{-1}$ que es también estrictamente positivo.

Veamos ahora que $\|x\|_1 \leq K_2\|x\|$. Si $x = 0$, la desigualdad se cumple trivialmente, pues $\|0\|_1 = 0 \leq K_2 \cdot 0 = K_2\|0\|$. Supongamos entonces que $x \neq 0$. En tal caso, podemos definir

$$y = \frac{x}{\|x\|_1}.$$

Como $\|\cdot\|_1$ es norma, tenemos que

$$\|y\|_1 = \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_1 = \frac{1}{\|x\|_1} \|x\|_1 = 1.$$

Así, $y \in \mathbb{S}_1$ y por lo tanto, $\|y\| \geq m$. Luego, podemos escribir

$$m \leq \|y\| = \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = \frac{1}{\|x\|_1} \|x\|,$$

de donde concluimos que

$$\|x\|_1 \leq m^{-1}\|x\| = K_2\|x\|,$$

que es exactamente lo que queríamos demostrar. Como la desigualdad es cierta tanto para $x = 0$ como para $x \neq 0$, la demostración está terminada. $\square$

Algunas Observaciones

1. En muchos momentos, dada una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, estudiamos la convergencia de la sucesión $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$. Esta segunda sucesión es una sucesión de números reales, y por lo tanto podíamos usar toda la maquinaria de límites vistas en los cursos anteriores.
2. En la demostración del Lema 4, usamos implícitamente que si una sucesión es convergente por coordenadas, entonces es convergente en $\|\cdot\|_1$. Esto es más débil que el resultado que vimos en clases que dice que una sucesión es convergente si y sólo si es convergente por coordenadas, independientemente de la norma. En la demostración de este teorema, no podíamos usar aquel resultado pues la demostración que vimos en clases ocupaba la equivalencia de normas. Es por esto que tuvimos que probar la convergencia con respecto a $\|\cdot\|_1$ de nuevo.
3. El paso clave del Lema 4 es el argumento diagonal finito. Este argumento nos dice que cada vez que tengo una familia finita de sucesiones $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ todas acotadas en $\mathbb{R}$, puedo extraer una familia de subsucesiones convergentes indexadas por la misma función $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Dicho de otro modo, puedo encontrar una función $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que las subsucesiones $(x_{\varphi(n)}^1)_{n \in \mathbb{N}}, (x_{\varphi(n)}^2)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (x_{\varphi(n)}^k)_{n \in \mathbb{N}}$ son convergentes.