Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
Diciembre de 2019

Pseudo Pauta Clase Auxiliar # 11: Cambio de base y Diagonalización

Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. [Un cambio de base sin conocer T]

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una trasformación lineal tal que su matriz representante con respecto a la base

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

en la partida y en la llegada es

$$M_{\beta\beta}(T) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(a) Encuentre la matriz representante de T respecto a la base β en la partida y la canónica en la llegada.

R: De la matriz representante se puede deducir que

$$\begin{aligned}
T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} &= 1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = & \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} &= 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
T\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} &= 1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = & \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} &= 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} &= 0\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = & \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} &= 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así la matriz buscada es

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\3 & 3 & 0\\3 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

(b) ¿Existen bases β_1, β_2 de $\mathbb{R}^3$ tales que $M_{\beta_1\beta_2}(T) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

R: No, pues sabemos que $rango(M_{\beta_1\beta_2}) = dim(Im(T)) = rango(M_{\beta\beta}) = 2$, en otras palabras el rango de la matriz representante es invariante a las bases que se escojan y es claro que la matriz que se muestra tiene rango 1.

P2. [Una lineal que utiliza trigonométricas]

Sea $\mathcal{F} := \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el e.v. de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales. Considere las aplicaciones $F : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{F}$ y $G : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^2$ definidas por:

$$F(a, b, c) = a\sin^2 x + b\cos^2 x + c$$
$$G(f) = (f(0), f(-\pi/2))$$

(a) Compruebe que F y G son lineales y calcule sus núcleos e imágenes.
R: Lineales definición. Para el Núcleo de la primera, si $\mathcal{F}$ es un espacio de funciones, el cero de estas es la función constante igual a 0, por lo tanto se tiene que cumplir que $asin^2(x) + bcos^2(x) + c = \forall x$, ergo puedo tomar algunos convenientes para concluir. Para el segundo, tener ojo con que en $\mathcal{F}$ no hay solo trigonométricas. $Im(F) = \langle\{sin^2(x), cos^2(x), 1\}\rangle$ (Es claron que genera, y la demostración de antes te da que son li) y $Im(G) = \mathbb{R}^2$ (argumentarlo).

(b) Si $U \subseteq \mathcal{F}$ es el s.e.v. de las funciones constantes, hallar $F^{-1}(U)$.
R: Dada una constante k cualquiera, se quiere que $F(a,b,c) = k$, es decir que $\forall x asin^2(x) + bcos^2(x) + c = k$, ¿Cuál es la única forma de garantizar que no dependa de x?

(c) Hallar bases de $\mathbb{R}^3$ y de $F(\mathbb{R}^3)$ respecto de las que la matriz de F sea la canónica.
R: Pensar en la de partida, la de llegada ya la indiqué... (Argumentar lo de la matriz representante)

(d) Halla la ecuación y el núcleo de la aplicación $G \circ F$.
R: Calcular explícitamente $G \circ F$ y e imponer que $G \circ F(a,b,c) = (0,0)$

P3. [Representante + cambio de base: $\mathbb{R}^4$]
Sea $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 2x_5 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 + 4x_4 + x_5 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre bases de $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$.
R: Escribir el sistema matricial, aplicar $E_{12}(-1)$ y $E_{23}(-0{,}5)$, para concluir que

$$Ker(T) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Para la iamgen solo separar, y escoger la cantidad li necesaria (TNI).

(b) Dadas las bases

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$$

Encuentre las matrices de pasaje que permitan calcular la matriz representante de T con respecto a las bases B y B', pasando por la base canónica tanto en la partida como en la llegada. Luego calcule dicha matriz representante usando las matrices de pasaje encontradas.

R: Determinar Matriz de cambio de base en el inicio, es decir escribir cada B_i en la canónica. Después determinar la representante con las canónicas en ambas partes (Hmm me suena a algo), y por último escribir cada e_i' en la base B', luego multiplicar las tres, deberían llegar a:

$$\begin{pmatrix} 7 & 21 & -7 \\ 6 & 20 & -8 \\ 6 & 18 & -6 \\ 5 & 13 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

P4. [Cálculo de determinante: Trigonométrica]
Sea

$$C = \begin{pmatrix} \cos(x+a_1) & \cos(x+a_2) & \cos(x+a_3) \\ \sin(x+a_1) & \sin(x+a_2) & \sin(x+a_3) \\ \sin(a_2-a_3) & \sin(a_3-a_1) & \sin(a_1-a_2) \end{pmatrix}.$$

Pruebe que el determinante no depende de x. Además, si a_1, a_2 y a_3 pertenecen al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, encuentre la relación entre ellos para que el determinante de C sea nulo.

R: Como queremos que no dependa de x vamos a desarrollar el determinante por la tercera fila, así vamos a realizar todas las operaciones que utilicen x's y que ojala se eliminen...

$$\left|\begin{pmatrix} \cos(x+a_1) & \cos(x+a_2) & \cos(x+a_3) \\ \sin(x+a_1) & \sin(x+a_2) & \sin(x+a_3) \\ \sin(a_2-a_3) & \sin(a_3-a_1) & \sin(a_1-a_2) \end{pmatrix}\right| =$$

$$\begin{aligned} &+\sin(a_2-a_3)(\cos(x+a_2)\sin(x+a_3) - cos(x+a_3)\sin(x+a_2)) \\ &-\sin(a_3-a_1)(\cos(x+a_1)\sin(x+a_3) - \cos(x+a_3)\sin(x+a_1)) \\ &+\sin(a_1-a_2)(\cos(x+a_1)\sin(x+a_2) - \cos(x+a_2)\sin(x+a_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = &+\sin(a_2-a_3)(\cos(x+a_2)\sin(x+a_3) - cos(x+a_3)\sin(x+a_2)) \\ &+\sin(a_3-a_1)(\cos(x+a_3)\sin(x+a_1) - \cos(x+a_1)\sin(x+a_3)) \\ &+\sin(a_1-a_2)(\cos(x+a_1)\sin(x+a_2) - \cos(x+a_2)\sin(x+a_1)) \end{aligned}$$

Notemos que las tres filas tienen el mismo patrón, todas son de la forma

$$\sin(a_i-a_j)(\cos(x+a_i)\sin(x+a_j) - cos(x+a_j)\sin(x+a_i))$$

Por lo que basta calcular el caso general y luego reemplazamos (Menos mal!!).

$$\begin{gathered} \cos(x+a_i)\sin(x+a_j) - cos(x+a_j)\sin(x+a_i)) = \\ (\cos(x)\cos(a_i) - \sin(x)\sin(a_i))(\sin(x)\cos(a_j) + \cos(x)\sin(a_j)) \\ -(\cos(x)\cos(a_j) - \sin(x)\sin(a_j))(\sin(x)\cos(a_i) + \cos(x)\sin(a_i)) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} = \cos(x)\cos(a_i)\sin(x)\cos(a_j) + \cos^2(x)\cos(a_i)\sin(a_j) \\ -\sin^2(x)\sin(a_i)\cos(a_j) - \sin(x)\sin(a_i)\cos(x)\sin(a_j) \\ -(\cos(x)\cos(a_j)\sin(x)\cos(a_i) - \sin^2(x)\sin(a_j)\cos(a_i) \\ +\cos^2(x)\cos(a_j)\sin(a_i) - \sin(x)\sin(a_j)\cos(x)\sin(a_i)) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} = \cos^2(x)(\cos(a_i)\sin(a_j) - \cos(a_j)\sin(a_i)) \\ +\sin^2(x)(\sin(a_j)\cos(a_i) - \sin(a_i)\cos(a_j)) \end{gathered}$$

$$= \cos(a_i)\sin(a_j) - \cos(a_j)\sin(a_i) = \cos(-a_i)\sin(a_j) + \cos(a_j)\sin(-a_i) = sen(a_j - a_i)$$

Así reemplazando en nuestro determinante llegamos:

$$\begin{gathered} \sin(a_2-a_3)\sin(a_3-a_2) + \sin(a_3-a_1)\sin(a_1-a_3) + \sin(a_1-a_2)\sin(a_2-a_1) \\ = -(\sin^2(a_2-a_3) + \sin^2(a_3-a_1) + \sin^2(a_1-a_2)) \end{gathered}$$

Este determinante claramente no depende de x. Además como tenemos una suma de puros cuadrados si queremos que sea nulo cada uno debe ser 0, y ya que estamos restringidos a $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, siempre ocurrirá que $-\pi < a_i - a_j < \pi$, y el único cero del seno en ese intervalo es el 0 por lo tanto la respuesta es que $a_1 = a_2 = a_3$.

P5. [Soluciones no nulas...]

(Piense en el contexto que está este problema) Determine los $a \neq 1$ tales que el sistema

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + ax_3 + ax_4 = 0 \\ ax_1 + x_2 + ax_3 + ax_4 = 0 \\ ax_1 + ax_2 + x_3 + ax_4 = 0 \\ ax_1 + ax_2 + ax_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

tenga soluciones no triviales.

R: Buscamos x tal que $Ax = 0 = 0x$, es decir se reduce el problema a ver cuando 0 es valor propio. El polinomio debería ser $p(\lambda) = -(a + \lambda - 1)^3(3a - \lambda + 1)$, luego descontando el caso $a = 1$, solo queda que $a = 1/3$.

P6. [Diagonalización 3x3]

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \\ 10 & -10 & -11 \end{pmatrix}$$

(i) Calcule el polinomio característico de A, los valores propios de A y sus multiplicidades algebráicas.
R: $p(\lambda) = \lambda^3 + 10\lambda^2 - \lambda - 10$, valores propios $= -10, 1, -1$, todos tienen multiplicidad 1.

(ii) Determinar los espacios propios asociados a cada valor propio y calcule las multiplicidades geométricas de cada valor propio.
R: Todo vp siempre tiene al menos un vector propio, y tenemos tres valores distintios, asique cada uno tendrá exactamente uno. Ergo, las multiplicidades geométricas son uno. Calculándolos se concluye que $\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ son los espacios propios.

(iii) Concluya que A es diagonalizable y explicite las matrices P y D.
R: Todos los valores tienen misma multiplicidad algebraica y geométrica, por ende es diagonalizable. Escribir como matrices lo anterior y listo.