Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
Diciembre de 2019

Pauta Clase Auxiliar # 12: Diagonalización

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Juan Pedro Ross

P1. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule el polinomio característico de A, los valores propios de A y sus multiplicidades algebráicas.
R:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = |A - \lambda I| &= \left| \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} \right| \text{ (escogiendo la tercera columna)} \\ &= 0 \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 & 3-\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| - 0 \cdot \left| \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| + (5-\lambda) \left| \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= (5-\lambda)((3-\lambda)^2 - 4) = (5-\lambda)(5 - 6\lambda + \lambda^2) = (5-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-5) \end{aligned}$$

Luego, imponiendo $p(\lambda) = 0$, se concluye que los valores propios son 1 y 5, donde el primero tiene multiplicidad algebraica 1, y el segundo 2.

(b) Determinar los espacios propios asociados a cada valor propio y calcule las multiplicidades geométricas de cada valor propio.
R: Resolvemos $(A - \lambda I)v = 0$. Primero para $\lambda = 1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} v = 0 \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & | & 0 \\ -2 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Lo que se traduce en las ecuaciones $2v_1 - 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$ y $4v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = 0$. Luego, $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Así el vector propio asociado a $\lambda = 1$, es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, que si se normaliza es $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (y la multiplicidad geométrica es 1).

Para $\lambda = 5$.

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \to \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & | & 0 \\ -2 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Lo que se traduce en la ecuación $-2v_1 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -v_2$. Luego, $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Notemos que los dos vectores ya son ortogonales entre sí, por lo que solo es necesario normalizar. Con esto el subespacio propio asociado a $\lambda = 5$ es el generado por el conjunto $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, y su multiplicidad geométrica es 2.

(c) Concluya que A es diagonalizable y explicite las matrices P y D.
R: Como la multiplicidad geométrica y algebraica son iguales en todos los casos, se tiene que A es diagonalizable (Es lo que tenía que ocurrir, pues A es simétrica).

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } D = diag(1,5,5)$$

(d) Dar una expresión sencilla para A^n, con $n \in \mathbb{N}$.
Como sabemos toda matríz diagonalizable $A = PDP^{-1}$ cumple que $A^n = PD^nP^{-1}$ (Con $P^{-1} = P^T$ si A es simétrica), así

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Es casualidad que P también haya quedado simétrica).

(e) ¿Es A invertible? De serlo, ¿Cuál es su inversa?
Sí, pues todos sus valores propios son no nulos. Su inversa está determinada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P2. Encuentre la diagonalización $A = PDP^t$ de la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

R: Control 3 de 2007-2, P2(a).

P3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & 3 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Determine los valores a, b y c para los cuales A resulta diagonalizable.

R:

$$Av = \begin{pmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & 3 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 + av_2 + bv_3 + cv_4 \\ 3v_2 + av_3 + bv_4 \\ v_3 + av_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

Como es una triangular superior sabemos que los valores propios son los que están en la diagonal. Primero $\lambda = 1$: de la cuarta fila deduzco que $v_4 = v_4$, de la tercera $v_3 + av_4 = v_3 \Rightarrow v_3 = v_3$ y $av_4 = 0$. Esto nos divide en dos casos primero: $a = 0$. de la segunda $3v_2 + a_v 3 + b_v 4 = v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{-b}{2} v_4$, y de la primera $2v_1 + av_2 + b_v 3 + cv_4 = v_1 \Rightarrow v_1 = -bv_3 - cv_4$ Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bv_3 - cv_4 \\ \frac{-b}{2} v_4 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bv_3 - cv_4 \\ \frac{-b}{2} v_4 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = v_3 \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_4 \begin{pmatrix} -c \\ \frac{-b}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lo que está muy bien muy tiene dimensión algebraica y geométrica 2. Ahora si $v_4 = 0$ de la segunda $2v_2 + av_3 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{-a}{2}v_3$ y finalmente de la primera $v_1 + \frac{-a^2}{2}v_3 + bv_3 = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{a^2-2b}{2}v_3$, es decir $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = v_3 \begin{pmatrix} \frac{a^2-2b}{2} \\ \frac{-a}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, solo es un vector propio y la multiplicidad algebraica era 2, por lo tanto no es diagonalizable.

Segundo $\lambda = 3$, recordemos que ya sabemos que $a = 0$. De la cuarta ecuación $v_4 = 3v_4 \Rightarrow v_4 = 0$, de la tercera $v_3 = 3v_3 \Rightarrow v_3 = 0$, de la segunda $3v_2 + 0 + 0 = 3v_2 \Rightarrow v_2 = v_2$ y de la primera $2v_1 = 3v_1 \Rightarrow v_1 = 0$, es decir $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, lo que está perfecto pues tiene mutiplicidad algebraica 1.

Tercero y último $\lambda = 2$, de la cuarta $v_4 = 2v_4 \Rightarrow v_4 = 0$, de la tercera $v_3 = 2v_3 \Rightarrow v_3 = 0$, de la segunda $3v_2 + 0 + 0 = 2v_2 \Rightarrow v_2 = 0$ y de la primera $2v_1 = 2v_1 \Rightarrow v_1 = v_1$. Así $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es decir solo hay que imponer $a = 0$ y dejar libres b, c

Finalmente la base será: $\left\{ \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c \\ \frac{-b}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es claro que este es un conjunto li y como son 4 vectores generan $\mathbb{R}^4$

P4. Sea $z \in \mathbb{R}^n$. Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ definida por: $A = I + zz^t$

(a) Pruebe que A es diagonalizable.
R: Notemos que $(I + zz^t)^t = I^t + (zz^t) = I + zz^t$ es decir es simétrica y por lo tanto diagonalizable.

(b) Pruebe que z es vector propio de A y calcule su valor propio correspondiente.
R: $Az = (I + zz^t)z = z + z(z^t z) = (z + (z^t z)z) = (1 + z^t z)z$ pues $z^t z$ es un escalar. Por lo tanto el valor propio es $1 + z^t z$.

(c) Sea $\mu \in \mathbb{R}^n$ ortogonal a z. Pruebe que μ es vector propio de A asociado al valor propio 1.
R: $A\mu = (I + zz^t)\mu = \mu + zz^t\mu = \mu$ pues $z^t\mu = 0$ al ser ortogonales.

(d) Encuentre todos los valores propios de A y sus multiplicidades. Puede serle útil calcular $dim(z^\perp)$.

R: Notemos que $dim(z^\perp) = n - 1$, pues sea $y \in z^\perp \Rightarrow \sum_{i=1}^n z_i y_i = 0 \Rightarrow y_1 = \sum_{i=2}^n \frac{-z_i}{z_1} y_i \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$

$y_2 \begin{pmatrix} \frac{-z_2}{z_1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} \frac{-z_3}{z_1} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + y_n \begin{pmatrix} \frac{-z_n}{z_1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ Y este espacio claramente tiene dimensión n-1.

Luego cada uno de esos vectores propios es ortogonal a z y por la parte anterior todos tienen como valor propio el 1. (De ahí saco n-1 y agrego el mismo z).

(e) Calcule el determinante de A.
R: Sabemos que en una matriz diagonalizable el determinante es la multiplicación de los valores propios, así el determinante será $(1 + z^t z)$

(f) Encuentre $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $A^{-1} = I + \beta zz^t$.
R: Queremos que $I = (I + zz^t)(I + \beta zz^t) = I + \beta zz^t + zz^t + \beta z(z^t z)z^t = I + (\beta + 1 + z^t z)zz^t$. Luego necesariamente $\beta = -1 - z^t z$.

P5. Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por el conjunto:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Determine una base ortonormal de U.

(b) Determine una base ortonormal de $U^\perp$.

R: Control 3 de 2007-2, P3(a).