Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
Diciembre de 2019

Clase Auxiliar # 12: Diagonalización

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: Juan Pedro Ross

P1. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule el polinomio característico de A, los valores propios de A y sus multiplicidades algebráicas.

(b) Determinar los espacios propios asociados a cada valor propio y calcule las multiplicidades geométricas de cada valor propio.

(c) Concluya que A es diagonalizable y explicite las matrices P y D.

(d) Dar una expresión sencilla para A^n, con $n \in \mathbb{N}$.

(e) ¿Es A invertible? De serlo, ¿Cuál es su inversa?

P2. Encuentre la diagonalización $A = PDP^t$ de la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

P3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & 3 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Determine los valores a, b y c para los cuales A resulta diagonalizable.

P4. Sea $z \in \mathbb{R}^n$. Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ definida por: $A = I + zz^t$

(a) Pruebe que z es vector propio de A y calcule su valor propio correspondiente.

(b) Sea $\mu \in \mathbb{R}^n$ ortogonal a z. Pruebe que μ es vector propio de A asociado al valor propio 1.

(c) Encuentre todos los valores propios de A y sus multiplicidades. Puede serle útil calcular $dim(z^\perp)$.

(d) Calcule el determinante de A.

(e) Encuentre $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $A^{-1} = I + \beta zz^t$.

P5. Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por el conjunto:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Determine una base ortonormal de U.

(b) Determine una base ortonormal de $U^\perp$.