Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
de Octubre de 2019

Pseudo Pauta Clase Auxiliar # 10: Repaso C2

Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. **(a)** Demuestre que $\{x^2, x^2-2x, x^2+x+4\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, y que $\{x^3, x^3-x, x^3+2x^2-x, x^3+2\}$ es una base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

R: En efecto, primero veamos que genera es decir: dado un $p(x) = ax^2+bx+c$ buscamos a', b', c' tales que

$$ax^2+bx+c = a'x^2+b'(x^2-2x)+c'(x^2+x+4) = (a'+b'+c')x^2+(c'-2b')x+4c' \tag{1}$$

Esto es equivalente a resolver el sistema

$$c = 4c' \tag{2}$$
$$b = c'-2b' \tag{3}$$
$$a = a'+b'+c' \tag{4}$$

De (2), es directo que $c' = c/4$, luego reemplazando en (3), se llega a que $b' = c/8 - b/2$, por último ingresando todo a (4), se concluye que $a' = a + b/2 - 3c/8$. Con todo esto se concluye que $\langle B_2 \rangle = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, donde B_2 es el conjunto en cuestión. Para ver que es li, nos damos una combinación lineal nula, reordenamos como en (1) y concluimos que

$$0 = 4c' \tag{5}$$
$$0 = c'-2b' \tag{6}$$
$$0 = a'+b'+c' \tag{7}$$

Lo que claramente tiene solución única $a' = b' = c' = 0$. Se concluye que B_2 es base.

Para B_3 (el otro conjunto), razonamos exactamente igual. Primero veamos que genera, es decir, dado un $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, buscamos a', b', c', d' tales que

$$ax^3+bx^2+cx+d = a'x^3+b'(x^3-x)+c'(x^3+2x^2-x)+d'(x^3+2) = (a'+b'+c'+d')x^3+2c'x^2+(-b-c)x+2d' \tag{8}$$

Esto es equivalente a resolver el sistema

$$a = a'+b'+c'+d' \tag{9}$$
$$b = 2c' \tag{10}$$
$$c = -b'-c' \tag{11}$$
$$d = 2d' \tag{12}$$

De (10) sale directamente $c' = b/2$, y de (12) que $d' = d/2$, reemplazando en (11), se llega a que $b' = -b/2 - c$, con lo que se concluye que $a' = a + c - d/2$. Con todo esto se concluye que $\langle B_3 \rangle = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Para ver que es li, nos damos una combinación lineal nula, reordenando como en (8) concluimos que:

$$0 = a'+b'+c'+d' \tag{13}$$
$$0 = 2c' \tag{14}$$
$$0 = -b'-c' \tag{15}$$
$$0 = 2d' \tag{16}$$

Lo que claramente tiene solución única $a' = b' = c' = d' = 0$. Se concluye que B_3 es base.

(b) Encuentre la matriz representante de la función lineal, con respecto a las bases anteriores, de

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \text{ tal que } f(p)(x) = 2p'(x) + 3\int_0^x p(t)dt.$$

R: Para calcular la matriz representante uno evalúa cada elemento de B_2, y el resultado lo descompone en B_3, para esto será muy útil, la solución al sistema $(9) - (12)$.

$$\begin{aligned} f(x^2) = 2(x^2)' + 3\int_0^2 t^2 dt = 4x + x^3 &\Rightarrow a = 1, b = 0, c = 4, d = 0 \\ &\Rightarrow a' = 5, b' = -4, c' = 0, d' = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} f(x^2 - 2x) = 2(x^2 - 2x) + 3\int_0^2 (t^2 - 2t)dt = x^3 - 3x^2 + 4x - 4 &\Rightarrow a = 1, b = -3, c = 4, d = -4 \\ &\Rightarrow a' = 7, b' = -5/2, c' = -3/2, d' = -2 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} f(x^2 + x + 4) = 2(x^2 + x + 4) + 3\int_0^2 (t^2 + t + 4)dt = x^2 + 3/2x^2 + 16x + 2 &\Rightarrow a = 1, b = 3/2, c = 16, d = 2 \\ &\Rightarrow a' = 16, b' = -67/4, c' = 3/4, d' = 1 \end{aligned} \tag{19}$$

Reuniendo estos coeficientes por columnas se concluye que la matriz representante es

$$M_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 16 \\ -4 & -5/2 & -67/4 \\ 0 & -3/2 & 3/4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Utilizando lo anterior, calcule $f(p)(x)$, para un $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, cualquiera.
R: De la parte a), sabemos que un polinomio cualquiera $p(x) = ax^+bx + c$, se escribe en la nueva base como

$$(a + b/2 - 3c/8)x^2 + (c/8 - b/2)(x^2 - 2x) + (c/4)(x^2 + x + 4),$$

así los coeficientes de las evaluaciones, en la base B_3, están dados por:

$$M_{B_1B_2}Coeficientes = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 16 \\ -4 & -5/2 & -67/4 \\ 0 & -3/2 & 3/4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + b/2 - 3c/8 \\ c/8 - b/2 \\ c/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a - b + 3c \\ -4a - 3b/4 - 3c \\ 3b/4 \\ b \end{pmatrix}.$$

Así:

$$\begin{aligned} f(p)(x) &= (5a - b + 3c)x^3 + (-4a - 3b/4 - 3c)(x^3 - x) + (3b/4)(x^3 + 2x^2 - x) + b(x^3 + 2) \\ &= 2b + (4a + 3c)x + 3bx^2/2 + ax^3. \end{aligned}$$

P2. Sea π_0 el plano que pasa por el origen y tiene vectores directores $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Escriba la ecuación normal del plano π_0.
R: $\left\langle \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \\ z - 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(b) Encuentre la ecuación cartesiana del plano π que pasa por $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y no corta a π_0.

R: $2x + y - z = 2$.

(c) Calcule la proyección de P sobre π_0.
R: Buscamos α, β y γ tales que

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

Escribiéndolo como sistema matricial y escalonando, se llega a que

$$P_{\pi_0} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + -1/3 \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = 2/3 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + 1/3 \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

(d) Calcule la distancia entre π y π_0.
R: $\|P - P_{\pi_0}\| = \sqrt{6}/3$

P3. Considere las siguientes rectas:

- $L_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ es el eje X
- $L_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ es la recta que pasa por los $(1, 2, 0)$ y $(-1, 3, -1)$.

(a) Describa las rectas por sus ecuaciones paramétricas.
R: $L_1 = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ y $L_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

(b) Encuentre una tercera recta $L_3 \subseteq \mathbb{R}^3$ que sea perpendicular a L_1 y L_2 y que además intersecte a ambas rectas.
R: Usando producto cruz determinamos el vector normal y luego buscamos los dos puntos de intersección. Esto se resume a resolver el sistema

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \alpha' \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \tag{20}$$

Con esto la recta es $L_3 : \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$

P4. Sea $\mathcal{P}_3(R)$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 3 con coeficientes reales. Se define la transformación $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dada por:

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_0 + (2a_1 + a_2)x + (2a_2 + a_3)x^2 + 2a_3x^3$$

(a) Pruebe que T es una transformación lineal inyectiva.
R: Linealidad, escribir la definición. Inyectividad, verificar que $T(p) = 0 \Leftrightarrow p = 0$ y concluir con caracterización.

(b) Pruebe que $\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = Ker((T - 2id)^3) \oplus Ker(T - id)$
Obs: $(T - 2id)^3 = (T - 2id) \circ (T - 2id) \circ (T - 2id)$
R: Primero notar que si $T(x) - x = 0 \Rightarrow T(x) - 2x = -x$, y con eso concluir que $Ker((T-2id)^3) \cap Ker(T-id) = \{0\}$. Por otro lado calculando $(T-2Id)^3(p) = -2a_0$ y $(T-Id)(p) = (a_1+a_2)x + (a_2+a_3)x^2 + a_3x^3$, y estudiando sus Ker se concluye que suman $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

P5. Sean X,Y espacios vectoriales y $f : X \to Y$ lineal.

(a) Suponiendo que $A \subseteq X$ es s.e.v. ¿Será $f(A)$ s.e.v?
R: Recordar que $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A : f(x) = y$, y estudiar $\alpha y_1 + y_2$.

(b) Suponiendo que $A \subseteq Y$ es s.e.v. ¿Será $f^{-1}(A)$ s.e.v?
R: Recordar que $x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A$, y estudiar $\alpha x_1 + x_2$.

P6. Sean U, V y W espacios vectoriales y considere $g : U \longrightarrow V$ y $f : V \longrightarrow W$ dos transformaciones lineales. Pruebe que:

(a) $\text{Ker}(g) \subseteq \text{Ker}(f \circ g)$
R: Recordar que el 0 siempre va al 0.

(b) Si $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$, entonces $\text{Ker}(g) = \text{Ker}(f \circ g)$.
R: Estudiar $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 0$

(c) $\text{Im}(f \circ g) \subseteq \text{Im}(f)$
R: Recordar que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

(d) Si $\text{Im}(g) = V$, entonces $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f)$
R: Recordar que si $y \in \text{Im}(f) \Rightarrow \exists x \in V : y = f(x)$.