Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
28 de Agosto de 2019

Pseudo Pauta Clase Auxiliar #4: (Sub)Espacios vectoriales

Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. Sean E y F espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$.

(a) Pruebe que dotando al conjunto $E \times F$ de las leyes:

$$\forall (x,y),(u,v) \in E \times F,\ (x,y)+(u,v) = (x +_E u, y +_F v)$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in E \times F,\ \alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$$

éste resulta ser un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.
R: En efecto, lo primero que hay que revisar es que $(E\times F,+)$ es un grupo abeliano. Para esto será fundamental que como E y F ya son espacios vectoriales, entonces $(E,+_E)$ y $(F,+_F)$ son grupos abelianos. Para facilitar notación ignoraré el sub-índice de la suma excepto cuando sea necesario, pero siempre tener en cuenta que la suma en la primera coordenada es la suma de E y la de la segunda la de F.

- **[Asociatividad:]** $((x,y)+(u,v))+(a,b) = (x+u,y+v)+(a,b) = ((x+u)+a,(y+v)+b) = (x+(u+a),y+(v+b)) = (x,y)+(u+a,v+b) = (x+y)+((u,v)+(a,b))$, donde el antepenúltimo igual es gracias que $+_E$ y $+_F$ son asociativas.
- **[Conmutatividad:]** $(x,y)+(u,v) = (x+u,y+v) = (u+x,v+y) = (u,v)+(x,y)$, donde el penúltimo igual es gracias a que $+_E$ y $+_F$ son conmutativas.
- **[Neutro:]** Sea e_E, e_F los neutros de E y F, respectivamente (Existen pues sabemos que son grupos), Luego $(x,y)+(e_E,e_F) = (x+e_E,y+e_F) = (x,y)$, es decir existe elemento neutro en $E\times F$. Ojo como ya vimos la conmutatividad no es necesaria revisar por el otro lado.
- **[Inversos:]**, Sea $(x,y)\in E\times F$, como $x\in E$ tiene inverso $-x$ (pues es grupo), lo mismo para $y \in F$, así $(x,y)+(-x,-y) = (x+-x,y+-y) = (e_E,e_F)$, es decir todo elemento tiene inverso. Ojo como ya vimos la conmutatividad no es necesario revisar por el otro lado.

Con esto, se concluye que $(E\times F,+)$ es grupo abeliano. Revisemos ahora las otras cuatro propiedades para ser espacio vectorial, para esto siempre hay que tener presente que E y F ya son espacios vectoriales, por lo que cumplen lo deseado.

- Sea $\lambda,\beta\in\mathbb{K}, x=(a,b)\in E\times F$. Entonces $(\lambda+\beta)x = ((\lambda+\beta)a,(\lambda+\beta)b) = (\lambda a+\beta a,\lambda b+\beta b) = (\lambda a,\lambda b)+(\beta a,\beta b) = \lambda(a,b)+\beta(a,b)$. Donde el antepenúltimo igual, fue gracias a que E,F son $\mathbb{K}$ espacios vectoriales.
- Sea $\lambda\in\mathbb{K}$ y $x=(a,b), y=(c,d)\in E\times F$. Entonces $\lambda(x+y) = \lambda(a+c,b+d) = (\lambda(a+c),\lambda(b+d)) = (\lambda a+\lambda c,\lambda b+\lambda d) = (\lambda a,\lambda b)+(\lambda c,\lambda d) = \lambda x+\lambda y$. Donde el antepenúltimo igual, fue gracias a que E,F son $\mathbb{K}$ espacios vectoriales.
- Sea $\lambda,\beta\in\mathbb{K}, x=(a,b)\in E\times F$, entonces $\lambda(\beta x) = \lambda(\beta a,\beta b) = (\lambda(\beta a,\lambda(\beta b)) = ((\lambda\beta)a,(\lambda\beta)b) = (\lambda\beta)x$. Donde el penúltimo igual, fue gracias a que E,F son $\mathbb{K}$ espacios vectoriales.
- Sea $x=(a,b)\in\mathbb{K}$, entonces $1\cdot x = (1\cdot a,1\cdot b) = (a,b)$. Donde el penúltimo igual, fue gracias a que E,F son $\mathbb{K}$ espacios vectoriales.

(b) Demuestre que $E\times\{0_F\}$ es un s.e.v. de $E\times F$, donde 0_F es el neutro aditivo del grupo abeliano F.
R: Par ver esto uno podría revisar las ocho propiedades como antes, sin embargo existe algo mucho más simple para ver que es s.e.v., esto es, la propiedad compacta que pide revisar tres cosas.

i) $E\times\{0_F\}$, es no vacío pues $(0_E,0_F)\in E\times\{0_F\}$.
ii) $E\times\{0_F\}\subseteq E\times F$, pues si $(x,y)\in E\times\{0_F\}\Rightarrow x\in E, y=0_F \Rightarrow x\in E, y\in F\Rightarrow (x,y)\in E\times F$.
iii) Sea $x=(a,b), y=(c,d)\in E\times\{0_F\}, \alpha\in\mathbb{K}$, veamos que $\alpha x+y\in E\times\{0_F\}$. En efecto, como $x=(a,b)\in E\times\{0_F\}\Rightarrow x\in E, b=0$, luego $\alpha x = (\alpha x,\alpha 0_F) = (\alpha x, 0_F)$ (Por propiedad conocida, si a un neutro de un e.v. lo multiplicas por un escalar sigue siendo el mismo), de la misma forma $y=(c,d)\in E\times\{0_F\}\Rightarrow c\in E, d=0_F$. Por lo tanto $\alpha x+y = (\alpha a+c,0_F+0_F) = (\alpha a+c,0_F)\in E\times\{0_F\}$

P2. Determine si las siguientes estructuras son espacios vectoriales.

(a) $\mathbb{R}^2$ con la suma usual y la siguiente ponderación por $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha \cdot (a,b) = (\alpha a, b)$.
R: No, falla la propiedad de que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall x = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ se cumple $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

(b) $\mathbb{R}^2$ con la suma usual y la siguiente ponderación por $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha \cdot (a,b) = (\alpha a, 0)$.

R: No, falla que $\forall x = (a,b) \in R^2$ se cumple que $1 \cdot x = x$

(c) **[Propuesto:**] $\mathbb{R}^+$ con la "suma" $x \oplus y = xy$ y la "ponderación" $\alpha x = x^\alpha$.

(d) **[Propuesto:**] El conjunto de las funciones de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ acotadas, con la suma y ponderación usuales.

(e) **[Propuesto:**] El conjunto de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que $f(1) = f(-1)$ con la suma y ponderación usuales.

P3. Sean E, F e.v. sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $T : E \longrightarrow F$ una función que satisface:

i) $T(0_E) = 0_F$
ii) $\forall x \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha T(x) = T(\alpha x)$
iii) $\forall x, y \in E, T(x+y) = T(x) + T(y)$

Considere:

$$T(E) = \{y \in F \ / \ \exists x \in E : T(x) = y\}$$

(a) Muestre que $T(E)$ es un s.e.v. de F
R: $\underline{\quad} \in T(E)$, por lo que no es vacío y $T(E) \subseteq F$ por definición, luego por propiedad compacta basta ver que $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall y_1, y_2 \in T(E)$ se tiene que $\alpha y_1 + y_2 \in T(E)$. Como $y_1, y_2 \in T(E)$, existen $x_1, x_2 \in E$, tales que $\underline{\qquad}$ y $\underline{\qquad}$, luego $\alpha y_1 + y_2 = \underline{\quad} T(\underline{\quad}) + T(\underline{\quad}) = T(\underline{\qquad}) + T(\underline{\quad})$ (Debido a la propiedad $\underline{\quad}$ del enunciado), luego $T(\underline{\qquad}) + T(\underline{\quad}) = T(\underline{\qquad} + \underline{\quad})$ (Por propiedad $\underline{\quad}$ del enunciado). Con lo que se concluye la demostración.

(b) Suponga además que T satisface que:

$$\forall x \in E,\ T(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Muestre que si $\{u_1, \cdots, u_n\} \subseteq E$ es *l.i.*, entonces $\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\} \subseteq F$ es *l.i.*
R: Sea $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$, queremos ver que si $\sum_{i=1}^n \alpha_i T(u_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \forall i$. En efecto $\sum_{i=1}^n \alpha_i T(u_i) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + ... + \alpha_n T(u_n) = T(\underline{\qquad}) + T(\underline{\qquad}) + ... + T(\underline{\qquad})$ (por propiedad $\underline{\quad}$ del enunciado), además $T(\underline{\qquad}) + T(\underline{\qquad}) + ... + T(\underline{\qquad}) = T(\underline{\qquad} + \underline{\qquad} + ... + \underline{\qquad})$ (Demostrarlo por inducción, basándose en la propiedad $\underline{\quad}$ del enunciado), si imponemos que $T(\underline{\qquad} + \underline{\qquad} + ... + \underline{\qquad}) = 0$, por enunciado llegamos a que $\underline{\qquad} + \underline{\qquad} + ... + \underline{\qquad} = 0$, y utilizando que los u_i son $\underline{\quad}$, concluimos lo pedido.

P4. Demostrar que si S_1, S_2 son subconjuntos de un espacio vectorial V tales que $S_1 \subseteq S_2$ entonces $< S_1 > \subseteq < S_2 >$. En particular si $S_1 \subseteq S_2$ y $< S_1 > = V$, entonces $< S_2 > = V$
R: Sea $x \in \langle S_1 \rangle$, entonces x es generado por $x_1, x_2, ..., x_n$ elementos de S_1, pero como $\underline{\quad}$, entonces $x_1, x_2, ..., x_n \underline{\quad}$, lo que concluye lo pedido. Para lo otro, notar que siempre se cumple que $\langle S_2 \rangle \subseteq V$, debido a que... Para la otra inclusión, sea $v \in V$, por hipótesis sabemos que $\underline{\quad} = \underline{\quad}$, por lo tanto $v \in \underline{\quad}$, y por lo ya demostrado $v \in \underline{\quad}$, que es lo que se necesitaba.