Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal
28 de Agosto de 2019

Clase Auxiliar #4: (Sub)Espacios vectoriales

Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. Sean E y F espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$.

(a) Pruebe que dotando al conjunto $E \times F$ de las leyes:

$$\forall (x,y),(u,v) \in E \times F,\ (x,y)+(u,v) = (x +_E u, y +_F v)$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in E \times F,\ \alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$$

éste resulta ser un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

(b) Demuestre que $E \times \{0_F\}$ es un s.e.v. de $E \times F$, donde 0_F es el neutro aditivo del grupo abeliano F.

P2. Determine si las siguientes estructuras son espacios vectoriales.

(a) $\mathbb{R}^2$ con la suma usual y la siguiente ponderación por $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha \cdot (a,b) = (\alpha a, b)$.

(b) $\mathbb{R}^2$ con la suma usual y la siguiente ponderación por $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha \cdot (a,b) = (\alpha a, 0)$.

(c) [**Propuesto:**] $\mathbb{R}^+$ con la "suma" $x \oplus y = xy$ y la "ponderación" $\alpha x = x^\alpha$.

(d) [**Propuesto:**] El conjunto de las funciones de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ acotadas, con la suma y ponderación usuales.

(e) [**Propuesto:**] El conjunto de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que $f(1) = f(-1)$ con la suma y ponderación usuales.

P3. Sean E, F e.v. sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $T : E \longrightarrow F$ una función que satisface:

i) $T(0_E) = 0_F$

ii) $\forall x \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha T(x) = T(\alpha x)$

iii) $\forall x, y \in E, T(x+y) = T(x) + T(y)$

Considere:

$$T(E) = \{y \in F \ / \ \exists x \in E : T(x) = y\}$$

(a) Muestre que $T(E)$ es un s.e.v. de F

(b) Suponga además que T satisface que:

$$\forall x \in E,\ T(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Muestre que si $\{u_1, \cdots, u_n\} \subseteq E$ es *l.i.*, entonces $\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\} \subseteq F$ es *l.i.*

P4. Demostrar que si S_1, S_2 son subconjuntos de un espacio vectorial V tales que $S_1 \subseteq S_2$ entonces $< S_1 > \subseteq < S_2 >$. En particular si $S_1 \subseteq S_2$ y $< S_1 > = V$, entonces $< S_2 > = V$