Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 2 Álgebra Lineal
14 de Agosto 2019

Clase Auxiliar #2: Sistemas de Ecuaciones

Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: Juan Pedro Ross

P1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 9 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 24 \\ 3x_1 & + & 1x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

(a) Escriba el sistema anterior en forma matricial, es decir, de la forma $Ax = b$, con $A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$.

(b) Encuentre x tal que $Ax = b$, con A y b encontrados en la parte anterior.

P2. Considere el sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & \alpha x_2 & & & - & \beta x_4 & = & 0 \\ & & \alpha x_2 & + & x_3 & + & \beta x_4 & = & \alpha \\ \beta x_1 & + & \alpha x_2 & + & \beta x_3 & & & = & \beta \\ \alpha x_1 & & & + & \beta x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

donde x_1, x_2, x_3 y x_4 son las incógnitas y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son los parámetros.
Determine los valores de α y β para que el sistema:

(a) Tenga infinitas soluciones

(b) No tenga soluciones

(c) Tenga una solución

P3. Determine si existe una matriz $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ de modo que para toda matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ se cumpla

$$M \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & d \end{pmatrix}.$$

Justifique su respuesta ya sea encontrando explícitamente M o por el contrario demostrando que no existe.

P4. **(a)** Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Demuestre que:

(i) A es invertible si y sólo si AA^t lo es.

(ii) Si $A^2 = A$ y $B = I - A$, entonces $B^3 = B$. Para el caso A invertible encuentre A y B.

(b) Demuestre que si existe $k \geq 1$ tal que $A^k = I$, entonces A es invertible.

P5. Se tiene una placa rectangular cuyas orillas se mantienen a cierta temperatura. Se tiene interés en encontrar la temperatura en los puntos interiores de la placa. Considere el siguiente diagrama de la figura $N°1$

Se quieren encontrar aproximaciones para los puntos T_1 a T_4, o sea la temperatura de los puntos intermedios. Suponga que la temperatura en un punto interior es el promedio de los cuatro puntos que lo rodean, arriba, a la derecha, abajo y a la izquierda. Usando esta suposición, establezca un sistema de ecuaciones y su solución, considerando primero el punto T1, luego el punto T2 y así siguiendo. Rescriba las ecuaciones de manera que todas las variables queden de un lado de la ecuación. Por ejemplo

$$T_1 = \frac{100 + T_2 + T_3 + 50}{4} \rightarrow 4T_1 - T_2 - T_3 = 150$$

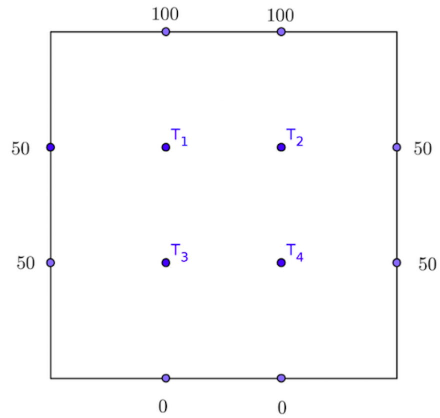

Figura 1: Figura de placa rectangular